DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul I, nr. 2 / 2018

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Stelian Corneliu ANDRONESCU	Eduard ASADURIAN
Tudor BĂLĂNESCU	Costel BĂLCĂU - redactor șef
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Doru Nicolae STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacţia: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești., Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul I, Nr. 2, Decembrie 2018

Cuprins

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI 5

D.A. Popescu, C. Bălcău, D. Constantin

Prezentarea Concursului de Informatică „Programming Day for High School", Ediția a II-a, Pitești, 12 mai 2018 5

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 18

M. Chirciu

Dezvoltări din RMM, Winter 2017 18

L.M. Giugiuc, A. Mirzakhmedov

On a Crux open problem 22

T. Kalogerakis

A dynamic identity in a triangle and some applications 25

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 28

I.A. Popescu

Vectori de frecvențe 28

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI 34

S.C. Andronescu, C. Bălcău, D. Constantin, D.A. Popescu

Determinarea ultimei cifre nenule pentru produse de numere naturale 34

L. Deaconu

Desenarea figurilor pentru problemele de geometrie cu ajutorul aplicației GeoGebra . . . 44

RUBRICA DE ROBOTICĂ 55

D.A. Popescu

Programarea roboților LEGO folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3 55

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 58

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 58

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 65

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 71

Teste pentru admiterea la facultate 78

Teste grilă pentru admiterea la facultate 82

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 90
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 90
Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 97
Teste pentru admiterea la facultate 107

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 108
Probleme propuse 108

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 116
Probleme propuse 116

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII 130

S.C. Andronescu

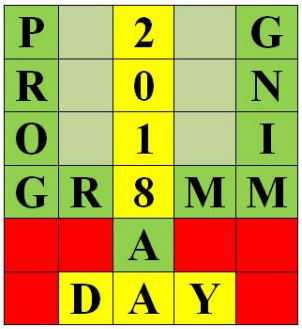
Evariste Galois, un matematician genial 130

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI

Prezentarea Concursului de Informatică ,,Programming Day for High School", Ediția a II-a, Pitești, 12 mai 2018

Doru Anastasiu Popescu [1], *Costel Bălcău* [2] *și Doru Constantin* [3]

Departamentul Matematică - Informatică al Universității din Pitești a organizat a doua ediție a concursului de programare clasică (folosind limbajele Pascal/C/C++ - Mediul de programare Code:Blocks) cu numele ,,Programming Day". La această ediție au participat elevi de la unități școlare din județele Argeș, Olt și Vâlcea.



Premiile câștigătorilor au fost sponsorizate de firma ROWEB Development, director general Viorel Costea (profesor de Informatică) și de firma Velox Logistics Center, director economic Adriana Neaga.

Concursul de programare clasică

Acesta a fost organizat pe trei secțiuni, corespunzătoare clasei a IX-a, clasei a X-a și claselor a XI-a și a XII-a. Concurenții au avut de rezolvat câte două probleme, fiecare având un punctaj de 100 de puncte. În continuare prezentăm problemele date în concurs și indicații de rezolvare.

Clasa a IX-a

Problema 1 – divgame

Adina și Mihai joacă un joc. Adina îi arată lui Mihai un șir de n numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și un număr natural k. Mihai are voie să facă zero, una sau mai multe operații de tipul: selectează un număr din șir și îl împarte la un divizor al său mai mic sau egal cu k. Pentru a câștiga, Mihai trebuie să obțină la final un șir de numere care au cel mai mare divizor comun egal cu 1 (cu alte cuvinte, să nu existe un număr întreg $d > 1$ care să dividă toate numerele din șirul final).

Cerință

Deoarece Adinei îi place cifra 3, ea îi va da lui Mihai 3 șiruri, de lungimi nu neapărat egale. Cunoscând aceste șiruri și numărul k, se cere:

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com
[2]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com
[3]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro

1. determinați cel mai mare divizor comun al numerelor din fiecare șir dat inițial;
2. ajutați-o pe Adina să afle, pentru fiecare din cele 3 șiruri, dacă Mihai poate câștiga sau nu (numărul k este același pentru toate șirurile).

Date de intrare

Fișierul de intrare `divgame.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe a doua linie se află numărul k.

Pe fiecare dintre următoarele 3 linii se află câte un număr n, reprezentând dimensiunea șirului, urmat de n numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$, reprezentând șirul dat de Adina.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `divgame.out` se vor scrie 3 linii, linia i conținând un singur număr natural reprezentând cel mai mare divizor comun al numerelor din șirul i, pentru $i = \overline{1,3}$.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `divgame.out` se vor afișa 3 linii: pe linia i se va scrie mesajul YES dacă Mihai poate câștiga pentru șirul i, respectiv NO în caz contrar, $i = \overline{1,3}$.

Restricții și precizări

1. $1 \leq k \leq 10^9$
2. $1 \leq$ dimensiunea șirurilor $\leq 10^5$
3. $1 \leq$ elementele șirurilor $\leq 10^9$
4. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj

Exemple

divgame.in	**divgame.out**	Explicație
1 6 3 10 15 30 4 7 49 21 35 2 33 1	**5** 7 1	$p = 1$ cmmdc(10,15,30) = 5 cmmdc(7,49,21,35) = 7 cmmdc(33,1) = 1
divgame.in	**divgame.out**	Explicație
2 6 3 10 15 30 4 7 49 21 35 2 33 1	**YES** **NO** **YES**	$p = 2$ Mihai poate aduce primul șir la forma 2 3 6, deci poate câștiga. Al 2-lea șir nu poate fi adus la un șir cu cmmdc 1 pentru $k = 6$. Al 3-lea șir are deja cmmdc 1.

Timp maxim de execuție: 0.4 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

În rezolvarea primei cerințe se va folosi repetat algoritmul lui Euclid pentru determinarea celui mai mic divizor comun (cmmdc) al numerelor din fiecare șir.

Dacă șirul are un singur element, cmmdc va fi chiar valoarea elementului, altfel determinăm cmmdc pentru primele două numere, apoi pentru rezultat și al treilea număr, etc, până epuizăm toate elementele șirului.

Pentru cerința a doua, Mihai poate câștiga dacă poate împărți elementele șirului la cmmdc-ul acestora (calculat la punctul 1). Prin urmare, dorim să verificăm, pentru fiecare șir, dacă cmmdc-ul elementelor șirului se poate descompune într-un produs de factori mai mici sau egali cu k. Pentru ca acest lucru să fie adevărat, trebuie ca toți factorii primi al cmmdc-ului să fie mai mici sau egali cu k.

Observație. Este suficient să parcurgem valorile de la 1 la sqrt(cmmdc) pentru a căuta factorii primi ai cmmdc-ului. Pentru fiecare i de la 1 la sqrt(cmmdc) vom verifica dacă i, respectiv cmmdc/i sunt prime și, dacă da, vom testa dacă sunt mai mici sau egale cu k. Dacă vreunul este mai mare sau egal cu k, răspunsul va fi NO.

La final, dacă toți factorii primi au fost mai mici sau egali cu k, vom afișa YES.

Problema 2 – spirala

Alex, elev în clasa a IX-a la un liceu din Pitești, a primit de ziua lui un joc de la fratele său – student la Informatică în anul I, Universitatea din Pitești. Jocul este format dintr-o tablă pătratică împărțită în n^2 pătrățele, câte n pe fiecare linie, și din n^2 jetoane pe care sunt scrise numere naturale (câte un număr pe fiecare jeton). Jocul constă în așezarea aleatorie a jetoanelor pe tablă și, pentru o valoare naturală k, trebuie să determinăm primul subtablou de dimensiune k care are proprietatea că șirul componentelor parcurse în spirală este o progresie aritmetică crescătoare. Subtablourile de dimensiune k sunt parcurse în ordinea crescătoare a coordonatelor colțului din stânga-sus. $(i, j) < (p, q)$ dacă $(i < p)$ sau $(i = p$ și $j < q)$.

Cerință

Cunoscând n, k și o așezare a jetoanelor pe tablă se cere să determinați:

1. cel mai mare număr din primul subtablou de dimensiune k;
2. coordonatele colțului din stânga-sus (linie coloană) ale primului subtablou de dimensiune k care are proprietatea că șirul componentelor parcurse în spirală este o progresie aritmetică crescătoare.

Date de intrare

Fișierul de intrare `spirala.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe a doua linie se află dimensiunea n a tablei și numărul k, separate printr-un spațiu.

Urmează n linii cu câte n numere separate prin câte un spațiu, ce reprezintă valorile de pe jetoanele aflate pe tabla jocului.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `spirala.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând cel mai mare număr din primul subtablou de dimensiune k.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `spirala.out` se vor scrie coordonatele colțului din stânga-sus (linie coloană) ale primului subtablou de dimensiune k care are proprietatea că șirul componentelor parcurse în spirală este o progresie aritmetică crescătoare. Dacă nu există subtablouri de dimensiune k cu proprietatea din enunț se va afișa 0 0.

Restricții și precizări

1. $2 \leq n \leq 100$
2. $2 \leq k \leq n$
3. $0 \leq$ elementele din tablou $\leq 10^6$
4. Liniile și coloanele sunt numerotate începând cu 1
5. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj

Exemple

`spirala.in`	`spirala.out`	Explicație
1 3 2 1 2 0 4 3 4 3 6 5	`4`	$p = 1$ Primul subtablou de dimensiune $k = 2$ este: 1 2 4 3 Cel mai mare element este 4.
`spirala.in`	**`spirala.out`**	Explicație
2 4 2 7 2 0 1 4 3 5 1 3 9 7 10 3 6 16 13	**`2 2`**	$p = 2$ Sunt două subtablouri de dimensiune $k = 2$ care au proprietatea că șirul componentelor parcurse în spirală este o progresie aritmetică crescătoare. Acestea sunt: $\begin{matrix}3 & 5\\ 9 & 7\end{matrix}$ și $\begin{matrix}7 & 10\\ 16 & 13\end{matrix}$ Primul are colțul din stânga-sus de coordonate 2 2.

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Pentru rezolvarea primei cerințe se parcurg elementele subtabloului de dimensiune k cu colțul din stânga-sus în coordonatele (1,1) și se determină în Max valoarea cea mai mare, după care se afișează Max.

Pentru a doua cerință se parcurg toate colțurile din stânga-sus ale subtablourilor de dimensiune k și pentru fiecare dintre ele se verifică dacă elementele parcurse în spirală îndeplinesc condiția de progresie aritmetică. În caz afirmativ se afișează coordonatele corespunzătoare și se oprește parcurgerea.

Clasa a X-a

Problema 1 – accesibil

Într-un sat de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile $n \times m$, există mai multe terenuri. Un teren reprezintă o zonă formată din parcele de dimensiune 1×1 vecine pe orizontală sau verticală (între oricare două parcele există un drum format din deplasări pe orizontală și/sau verticală care să treacă numai prin acel teren).

Fiecare teren este reprezentat pe hartă printr-un număr natural, mai exact fiecare parcelă aparținând terenului este marcată prin numărul respectiv. Deoarece administrației locale nu-i plac numerele mari, aceasta a decis că pot exista mai multe terenuri identificate prin același număr, cu condiția ca aceste terenuri să nu fie vecine (să nu aibă parcele vecine pe orizontală sau pe verticală), astfel încât să nu existe nicio confuzie.

Unele terenuri sunt poziționate bine, altele mai puțin bine. Fiecare locuitor își dorește să poată să ajungă din exteriorul satului la terenul său, fără a trece peste terenul altui locuitor, adică să existe un drum de la orice parcelă a terenului său la una din cele patru margini ale satului, drum care să treacă numai prin parcele ale terenului său. Un astfel de teren se numește *accesibil* și este visul fiecărui locuitor.

Cerință

Dându-se harta satului, sub forma unei matrice $n \times m$ ce conține pe fiecare poziție câte un număr de identificare, să se determine:

1. numărul de terenuri din sat;
2. numărul de terenuri accesibile.

Date de intrare

Fișierul de intrare `accesibil.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2.

Pe a doua linie se află numerele n și m separate printr-un spațiu.

Pe următoarele n linii se află câte m numere descriind harta satului.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `accesibil.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de terenuri din sat.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `accesibil.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând numărul de terenuri accesibile.

Restricții și precizări

1. $3 \leq n, m \leq 1000$
2. $0 \leq$ valorile de pe hartă ≤ 100
3. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 50% din punctaj

Exemple

accesibil.in	accesibil.out	Explicație
1 5 6 0 3 3 8 4 3 0 3 1 8 8 3 0 1 1 1 8 3 1 1 0 0 4 2 3 1 2 2 2 2	10	$p = 1$ Există 10 terenuri pe harta dată.
accesibil.in	accesibil.out	Explicație
2 5 6 0 3 3 8 4 3 0 3 1 8 8 3 0 1 1 1 8 3 1 1 0 0 4 2 3 1 2 2 2 2	8	$p = 2$ Există 8 terenuri cu drum de acces către o latură a matricei.

Timp maxim de execuție: 0.9 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 8 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Pentru rezolvarea primei cerințe se folosește un algoritm de tip umplere (fill), căutând în matrice poziții nevizitate și încercând să vizităm (umplem) o zonă maximală care păstrează aceeași valoare cu cea din poziția de start, deplasându-ne numai pe linii sau pe coloane (în cele patru direcții: sus, jos, stânga, dreapta). La fiecare găsire a unei poziții nevizitate în matrice (și implicit a unui nou teren pe hartă), vom incrementa un contor pentru numărul de terenuri. La final se va afișa valoarea reținută în acest contor.

Cerința a doua se deosebește de prima prin faptul că trebuie să vizităm (și să numărăm) numai acele terenuri care ,,ating" cel puțin o latură a satului. Prin urmare, vom porni cu căutarea de terenuri nevizitate numai de pe marginile matricei, acest lucru garantându-ne că numărăm numai terenurile accesibile. Pentru fiecare element de pe laturile matricei care este marcat ca nevizitat, incrementăm un contor, iar apoi aplicăm algoritmul de fill și umplem (vizităm) tot terenul care este legat de acel element. La final se afișează valoarea contorului (numărul de terenuri accesibile).

Problema 2 – subtablou

Tică, elev în clasa a X-a la un liceu din Pitești, a primit de ziua lui un joc de la fratele său – student la Informatică în anul I, Universitatea din Pitești. Jocul este format dintr-o tablă pătratică împărțită în n^2 pătrățele, câte n pe fiecare linie, și din n^2 jetoane pe care sunt scrise cifre zecimale (câte o cifră pe fiecare jeton). Jocul constă în așezarea aleatorie a jetoanelor pe tablă și, pentru o valoare naturală k, trebuie să determinăm numărul de subtablouri de dimensiune k care au suma elementelor un număr prim.

Cerință

Cunoscând n, k și o așezare a jetoanelor pe tablă se cere să determinați:

1. suma elementelor celui mai din dreapta-jos subtablou de dimensiune k;
2. numărul de subtablouri de dimensiune k care au suma elementelor un număr prim.

Date de intrare

Fișierul de intrare `subtablou.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2. Pe a doua linie se află dimensiunea n a tablei și numărul k, separate printr-un spațiu. Urmează n linii cu câte n cifre separate prin câte un spațiu, ce reprezintă valorile de pe jetoanele aflate pe tabla jocului.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `subtablou.out` se va scrie un singur număr natural reprezentând suma elementelor celui mai din dreapta-jos subtablou de dimensiune k.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `subtablou.out` se va scrie numărul de subtablouri de dimensiune k care au suma elementelor un număr prim.

Restricții și precizări

1. $1 \leq n \leq 200$
2. $1 \leq k \leq n$
3. Pntru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj

Exemple

<table>
<tr><th>subtablou.in</th><th>subtablou.out</th><th>Explicație</th></tr>
<tr><td>1
3 2
1 1 0
3 0 1
3 5 8</td><td>14</td><td>$p = 1$
Cel mai din dreapta-jos subtablou
de dimensiune $k = 2$ este
0 1
5 8
cu suma elementelor 14.</td></tr>
<tr><th>subtablou.in</th><th>subtablou.out</th><th>Explicație</th></tr>
<tr><td>2
3 2
3 2
1 1 0
3 0 1
3 5 8</td><td>3</td><td>$p = 2$

Sunt 3 subtablouri de dimensiune $k = 2$
care au suma elementelor un număr prim.

Acestea sunt:
<table><tr><td>1 1
3 0</td><td>1 0
0 1</td><td>3 0
3 5</td></tr><tr><td>Suma=5</td><td>Suma=2</td><td>Suma=11</td></tr></table></td></tr>
</table>

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Pentru prima cerință se parcurg elementele subtabloului cerut și se calculează suma lor, după care aceasta se afișează.

Pentru a doua cerință, dacă notăm cu a tabloul dat, se construiește un nou tablou sum, în care sum[i][j] reprezintă suma elementelor subtabloului cu colțul din stânga-sus de coordonate (1,1) și colțul din dreapta-jos de coordonate (i,j). Pentru acest lucru folosim formula:

sum[i][j] = a[i][j] + sum[i][j - 1] + sum[i - 1][j] - sum[i - 1][j - 1].

Suma elementelor unui subtablou din tabloul a cu colțul din dreapta-jos de coordonate (i,j) și de dimensiune k este egală cu sum[i][j] - sum[i - k][j] - sum[i][j - k] + sum[i - k][j - k].

Pentru verificarea condiției de număr prim vom construi ciurul lui Eratostene până la valoarea $9n^2$ (aceasta fiind valoarea maximă a unei sume calculate pentru un subtablou).

Clasele a XI-a și a XII-a

Problema 1 – intellistring

Tim și-a creat propriul test de inteligență. El a scris un program care îi generează inițial un string s, iar apoi îi dă la intervale fixe de timp operații de forma "adaugă caracterul dat la sfârșitul stringului t" sau "șterge caracterul de la sfârșitul stringului t", unde t este un string inițial vid.

Pentru a trece testul, Tim trebuie să decidă într-un timp scurt (setat anterior de el), după fiecare operație dată de program, dacă stringul t se regăsește în stringul s sub forma unui subșir (caracterele lui t trebuie să se regăsească în s în aceeași ordine ca în t, nu neapărat pe poziții consecutive).

Însă programul lui Tim este incomplet. El nu a reușit să implementeze partea de verificare a răspunsurilor date de utilizator. De aceea, are nevoie de un mic ajutor. De asemenea, el ar mai vrea să știe și lungimea celui mai lung prefix al alfabetului englez (adică al șirului "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz") care se găsește ca subșir în t (după fiecare operație).

Cerință

Dându-se stringul s, precum și o listă de operații de forma "push c" (adaugă caracterul c la finalul lui t) sau "pop" (șterge ultimul caracter din t), unde t este inițial vid, să se determine:

1. lungimea celui mai lung prefix al alfabetului care se găsește ca subșir în t după fiecare operație;
2. rezultatul întrebării "se regăsește t în s sub forma unui subșir?" după fiecare operație din lista dată.

Date de intrare

Fișierul de intrare `intellistring.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2. Pe a doua linie se află stringul s. Pe a treia linie se află numărul de operații n. Pe fiecare dintre următoarele n linii se află câte o operație de tipul "push c" sau "pop", cu semnificația de mai sus.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `intellistring.out` se vor scrie n linii: pe linia i se scrie un singur număr natural reprezentând lungimea celui mai lung prefix al alfabetului care se găsește ca subșir în t după primele i operații.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință.

În acest caz, în fișierul de ieșire `intellistring.out` se vor scrie n linii, linia i conținând mesajul YES dacă după primele i operații stringul t se regăsește ca subșir în s, respectiv NO în caz contrar.

Restricții și precizări

1. $1 \leq n$, lungimea lui $s \leq 100000$
2. O operație pop pe un șir t vid lasă șirul t nemodificat
3. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 40% din punctaj

Exemple

`intellistring.in`	`intellistring.out`	Explicație

1
`abcabc`
6
`push a`
`pop`
`push a`
`push b`
`push b`
`push f`
	1
	0
	1
	2
	2
	2
		$p = 1$
		Stringul t va arăta după fiecare operație astfel: ”a”, ””, ”a”, ”ab”, ”abb”, ”abbf”.
		Se iau în considerare subșirurile de forma: a, ab, abc, abcd, ...

`intellistring.in`	`intellistring.out`	Explicație

2
`abcabc`
8
`push a`
`pop`
`push a`
`push a`
`push a`
`pop`
`push c`
`push b`
	YES
	YES
	YES
	YES
	NO
	YES
	YES
	NO
		$p = 2$
		Stringul t va arăta după fiecare operație astfel: ”a”, ””, ”a”, ”aa”, ”aaa”, ”aa”, ”aac”, ”aacb”.
		Șirurile ”aaa” și ”aacb” nu se regăsesc în s (ca subșiruri); restul se regăsesc.

Timp maxim de execuție: 0.4 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 16 MB.

Doru Constantin, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Pentru prima cerință folosim o stivă. La fiecare operație ”push c” pentru care c completează cel mai lung prefix existent, adăugăm în stivă perechea formată din caracterul c și lungimea curentă a string-ului t. Lungimea este folosită pentru a ști când un apel de pop va aduce

eliminarea perechii din vârful stivei. Rezultatul va fi determinat folosind perechea din vârful stivei (dacă există), sau va fi 0 dacă stiva este vidă.

Pentru a doua cerință vom precalcula folosind metoda programării dinamice o matrice next[c][poz], care ne spune care este cea mai din stânga poziție, aflată la dreapta poziției poz, pe care se află un caracter c. Dacă nu există un caracter c pe o poziție >= poz, vom reține în next valoarea $n + 1$ (n fiind lungimea lui s). De asemenea, vom folosi și o stivă în care salvăm după fiecare operație primul index (din s) la care se termină o apariție a lui t ca substring în s (sau $n + 1$ dacă t nu se găsește ca substring în s). La fiecare operație "push c" verificăm vârful stivei și inserăm în stivă valoarea next[c][vf], unde vf este elementul din vârful stivei. La fiecare operație "pop" eliminăm vârful stivei (dacă stiva nu e vidă). Rezultatul după fiecare operație se determină comparând elementul din vârful stivei cu n: dacă este <= n, înseamnă că există o apariție a lui t ca subșir în s care se termină la poziția respectivă, altfel t nu se regăsește în s.

Problema 2 – insule

Un arhipelag este alcătuit din mai multe insule, codificate prin numerele $1, 2, \ldots, w$. Pe unele insule se găsesc localități. Localitățile arhipelagului sunt codificate prin numere naturale nenule. Nu există două localități codificate cu același număr. Între localitățile aceleiași insule pot exista șosele (legături directe), numărul total de șosele din arhipelag este m.

Centrul de statistică al arhipelagului realizează câteva studii și pe baza informațiilor de la ministerul de transport obține informațiile:

1. numărul de legături directe între localitățile fiecărei insule i, $1 \leq i \leq w$;
2. codurile insulelor (în ordine crescătoare) care conțin un număr maxim de grupuri de localități între care se poate circula direct sau folosind localități intermediare.

Cerință

Cunoscând w, codurile localităților de pe fiecare insulă și cele m perechi de localități din arhipelag între care există legături directe prin șosele se cere să determinați:

1. numărul de legături directe între localitățile fiecărei insule i, $1 \leq i \leq w$;
2. codurile insulelor (în ordine crescătoare) care conțin un număr maxim de grupuri de localități între care se poate circula direct pe șosele sau folosind localități intermediare.

Date de intrare

Fișierul de intrare `insule.in` conține pe prima linie un număr natural p. Pentru toate testele de intrare, numărul p poate avea doar valoarea 1 sau 2. Pe a doua linie a fișierului se află w și m separate între ele printr-un spațiu. Urmează w linii cu localitățile fiecărei insule în formatul: k x_1 x_2 ... x_k, unde k este numărul de localități, iar x_1 x_2 ... x_k localitățile aflate pe insula respectivă. Apoi urmează m perechi cu legăturile directe prin șosele între localități, câte o pereche pe o linie, codurile localităților fiind separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Dacă valoarea lui p este 1, **se va rezolva numai punctul 1)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `insule.out` se vor scrie w numere separate prin câte un spațiu, reprezentând numărul de legături directe între localitățile fiecărei insule i, $1 \leq i \leq w$.

Dacă valoarea lui p este 2, **se va rezolva numai punctul 2)** din cerință. În acest caz, în fișierul de ieșire `insule.out` se vor scrie codurile insulelor (în ordine crescătoare) care conțin

un număr maxim de grupuri de localități între care se poate circula direct pe șosele sau folosind localități intermediare.

Restricții și precizări

1. $1 \leq$ numărul de localități ≤ 10000
2. $1 \leq w \leq 300$
3. Pentru rezolvarea corectă a cerinței 1 se acordă 20% din punctaj
4. Toate codurile localităților formează un șir de numere consecutive ce începe cu 1

Exemple

insule.in	insule.out	Explicație
1 3 4 3 1 7 4 1 2 4 8 3 6 5 1 4 8 3 5 8 3 5	1 0 3	$p = 1$ Prima insulă conține localitățile cu codurile 1, 4, 7 și o șosea [1, 4]. A doua insulă are o singură localitate cu codul 2 și zero șosele. A treia insulă conține localitățile cu codurile 3, 5, 6, 8 și 3 șosele: [8, 3], [5,8], [3,5].
insule.in	**insule.out**	**Explicație**
2 3 4 3 1 7 4 1 2 4 8 3 6 5 1 4 8 3 5 8 3 5	1 3	$p = 2$ Prima insulă conține localitățile cu codurile 1, 4, 7 și o șosea [1, 4]. A doua insulă are o singură localitate cu codul 2 și zero șosele. A treia insulă conține localitățile cu codurile 3, 5, 6, 8 și 3 șosele: [8, 3], [5,8], [3,5]. Prima insulă conține două grupuri de localități cu conexiune pe șosele {1, 4} si {7}. A doua insulă conține un singur grup cu o localitate {2}. A treia insulă conține două grupuri de localități cu conexiune pe șosele {3, 8,5} si {6}. Insulele 1 și 3 au un număr maxim de grupuri cu conexiune pe șosele.

Timp maxim de execuție: 0.4 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB, din care 2 MB pentru stivă.

Doru Constantin, Costel Bălcău, Pitești, *Gabriel Boroghină*, București

Soluție

Pentru rezolvarea problemei trebuie să construim un graf neorientat în care nodurile sunt localități, iar muchiile sunt șosele. Memorarea grafului se va face folosind liste de adiacență. Pentru fiecare localitate vom reține într-un vector insula căreia îi aparține (insula[x] = i, dacă x este pe insula i). În momentul în care se citesc perechile de localități care alcătuiesc șosele se actualizează componentele unui vector ce reține numărul de șosele din fiecare insulă (în C++

fin >> x >> y; nr_legaturi[insula[x]]++;). Apoi se afișează pentru prima cerință acest vector (nr_legaturi).

Pentru rezolvarea celei de-a doua cerințe se folosește un algoritm de determinare a componentelor conexe din graful construit, lucru ce implică folosirea parcurgerii în lățime sau în adâncime.

Concursul de programare a roboților LEGO

La acest concurs a fost propusă următoarea problemă.

Problema – robotică

Punctaj maxim 120+20=140 puncte

Durata deplasării robotului: maxim 2 minute

Planșă utilizată: WRO 2017, REGULAR CATEGORY, ELEMENTARY
(http://www.wro2017.org/Regular_Category/Elementary/WRO-2017-Regular-Category-Elementary-PrintV2.pdf)

Punct de plecare: pătrat verde, cu robotul orientat în orice direcție, dar cu toate roțile pe verde.

Activitate robot: să împingă cât mai multe cuburi pe porțiunile de masă care au aceeași culoare cu culoarea cubului. Pentru împingerea pe suprafața corespunzătoare a unui cub se primesc 20 de puncte. Pentru a se obține cele 20 de puncte trebuie ca toată suprafața de pe masă a cubului să fie în zona corespunzătoare culorii lui, altfel nu se primește niciun punct. Dacă un cub este deplasat cu întreaga suprafață a sa pe o zonă cu altă culoare, echipa se depunctează cu 10 puncte.

Oprirea robotului:

1. Implicit după 2 minute.
2. Când unul dintre concurenți strigă **stop**.
3. Când se oprește robotul sau când părăsește tabla.
4. Dacă robotul se oprește în locul de unde a plecat (cu toate roțile, inclusiv bila, pe culoarea verde) atunci echipa mai primește 10 puncte.
5. Dacă se pune mâna pe robot.

Punctaj final:

Punctele se contorizează și la sfârșit constituie punctajul rundei.

O echipă are cinci runde (încercări pe planșă) și cel mai mare punctaj împreună cu timpul rundei vor fi folosite la întocmirea clasamentului.

Masa

La masă acesul se face în ordinea sosirii unui membru al echipei. Robotul se așează la punctul de plecare și se pornește doar când un membru al juriului spune **start**, moment în care se pornește cronometrul.

Nicolae Bold, Slatina

Câștigătorii concursului

Premianții concursului de programare clasică, respectiv de programare a roboților LEGO Mindstorm EV3 au fost:

Secțiunea A – clasa a IX-a: *Vădăstreanu Robert Valentin*, Colegiul Național "Radu Greceanu", Slatina, Olt, premiul I; *Coneschi Vlad Silviu*, Școala Gimnazială "Eugen Ionescu", Slatina, Olt, premiul al II-lea; *Chiriac Alexandru*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea B – clasa a X-a: *Lăzăroiu Lucas*, Colegiul Național "Dinicu Golescu", Câmpulung Muscel, Argeș, premiul I; *Cioc Alex Andrei*, Colegiul Național "Zinca Golescu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea; *Petolea Cosmin*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al III-lea.

Secțiunea C – clasele a XI-a și a XII-a: *Ion David Gabriel*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul I; *Kapros Ana*, Colegiul Național "Mircea cel Bătrân", Râmnicu Vâlcea, Vâlcea, premiul al II-lea; *Popescu Ion Alexandru*, Colegiul Național "Radu Greceanu", Slatina, Olt, premiul al III-lea.

Secțiunea R – Programarea roboților LEGO Mindstorm EV3: *Vădăstreanu Robert Valentin*, Colegiul Național "Radu Greceanu", Slatina, Olt, *Coneschi Vlad Silviu*, Școala Gimnazială "Eugen Ionescu", Slatina, Olt, *Constantinescu Liviu Gabriel*, Colegiul Național "Radu Greceanu", Slatina, Olt, premiul I; *Belegan David Nicola*, Colegiul Național "I.C. Brătianu", Pitești, Argeș, premiul al II-lea.

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Dezvoltări din RMM, Winter 2017

Marin Chirciu [1]

Articolul își propune ca, pornind de la **Problema JP. 105, Winter Edition 2017** din **Romanian Mathematical Magazine,** sub semnătura **D.M. Bătinețu-Giurgiu**, România și **Martin Lukarevski**, Macedonia, să prezinte probleme din aceeași clasă de inegalități.

Aplicația 1 (**Problema JP. 105**). *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{a^{m+2}}{b^m+c^m}+\frac{b^{m+2}}{c^m+a^m}+\frac{c^{m+2}}{a^m+b^m}\geq 2\sqrt{3}S,\ \textit{unde}\ m>0.$$

Folosim rezultatul ajutător:

Lema 1. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}a^2+\frac{y}{z+x}b^2+\frac{z}{x+y}c^2\geq 2\sqrt{3}S,\ \textit{unde}\ x,y,z>0.$$

G.Tsintsifas, Greece

Demonstraţie. Avem $\sum \frac{x}{y+z}a^2=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^2=\sum\frac{x+y+z}{y+z}a^2-\sum a^2$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum a^2=(x+y+z)\frac{(2p)^2}{2(x+y+z)}-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$$

$$=2p^2-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)=2\left(r^2+4Rr\right).$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$$\sum a=2p \text{ și } \sum a^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right).$$

Rămâne să arătăm că $2\left(r^2+4Rr\right)\geq 2\sqrt{3}S\Leftrightarrow r^2+4Rr\geq\sqrt{3}rp\Leftrightarrow 4R+r\geq p\sqrt{3}$, care este inegalitatea lui Doucet.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Soluția Aplicației 1: Înlocuind în Lema 1

$$x=a^m, y=b^m, z=c^m$$

obținem inegalitatea din **Problema JP. 105**. □

[1]Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

Observația 1. Condiția $m > 0$ nu este necesară.

Pentru $m = 0$ se obține $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ (Ionescu (1897) – Weitzenböck (1919)).

Pentru $m = -1$ se obține $\sum \frac{abc}{b+c} \geq 2\sqrt{3}S$.

Pentru $m = -2$ se obține $\sum \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \geq 2\sqrt{3}S$.

În aceeași clasă de inegalități:

Aplicația 2. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}a^4 + \frac{y}{z+x}b^4 + \frac{z}{x+y}c^4 \geq 8S^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Crux Mathematicorum 11/1986, *George Tsintsifas*, Greece

Soluție: Avem

$$\sum \frac{x}{y+z}a^4 = \sum \left(\frac{x}{y+z} + 1 - 1\right) a^4 = \sum \frac{x+y+z}{y+z}a^4 - \sum a^4$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} (x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum (y+z)} - \sum a^4$$

$$= (x+y+z)\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{2(x+y+z)} - \sum a^4 = \frac{1}{2}\left(\sum a^2\right)^2 - \sum a^4 = \frac{2\sum b^2c^2 - \sum a^4}{2}$$

$$= \frac{2\left[p^4 + p^2\left(2r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R+r\right)^2\right] - 2\left[p^4 - p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + r^2\left(4R+r\right)^2\right]}{2}$$

$$= 8r^2p^2 = 8S^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum b^2c^2 = p^4 + p^2\left(2r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R+r\right)^2$ și $\sum a^4 = 2\left[p^4 - p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + r^2\left(4R+r\right)^2\right]$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Aplicația 3. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}(p-a)^2 + \frac{y}{z+x}(p-b)^2 + \frac{z}{x+y}(p-c)^2 \geq 2r(4R+r) - \frac{1}{2}p^2, \text{ unde } x, y, z > 0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Avem

$$\sum \frac{x}{y+z}(p-a)^2 = \sum \left(\frac{x}{y+z} + 1 - 1\right)(p-a)^2 = \sum \frac{x+y+z}{y+z}(p-a)^2 - \sum (p-a)^2$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} (x+y+z)\frac{\left(\sum (p-a)\right)^2}{\sum (y+z)} - \sum (p-a)^2 = (x+y+z)\frac{(p)^2}{2(x+y+z)} - \left(p^2 - 2r^2 - 8Rr\right)$$

$$= \frac{1}{2}p^2 - \left(p^2 - 2r^2 - 8Rr\right) = 2\left(r^2 + 4Rr\right) - \frac{1}{2}p^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum (p-a) = p$ și $\sum (p-a)^2 = p^2 - 2r^2 - 8Rr$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Aplicația 4. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}(p-a)^4+\frac{y}{z+x}(p-b)^4+\frac{z}{x+y}(p-c)^4\geq 2rp^2(4R-r)-\frac{1}{2}p^4,\ \textit{unde}\ x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Avem

$$\sum\frac{x}{y+z}(p-a)^4=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)(p-a)^4=\sum\frac{x+y+z}{y+z}(p-a)^4-\sum(p-a)^4$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\frac{\left(\sum(p-a)^2\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum(p-a)^4=(x+y+z)\frac{(p^2-2r^2-8Rr)^2}{2(x+y+z)}-$$

$$-\left(p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2\right)=\frac{1}{2}\left(p^2-2r^2-8Rr\right)^2-\left(p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2\right)$$

$$=2rp^2(4R-r)-\frac{1}{2}p^4.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum(p-a)^2=p^2-2r^2-8Rr$ și $\sum(p-a)^4=p^4-16p^2Rr+2r^2(4R+r)^2$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Aplicația 5. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}a^2(p-a)^2+\frac{y}{z+x}b^2(p-b)^2+\frac{z}{x+y}c^2(p-c)^2\geq 2S^2,\ \textit{unde}\ x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Avem

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2(p-a)^2=\sum\left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^2(p-a)^2=\sum\frac{x+y+z}{y+z}a^2(p-a)^2-\sum a^2(p-a)^2$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq}(x+y+z)\frac{\left(\sum a(p-a)\right)^2}{\sum(y+z)}-\sum a^2(p-a)^2$$

$$=(x+y+z)\frac{(2r(4R+r))^2}{2(x+y+z)}-\left[2r^2\left((4R+r)^2-p^2\right)\right]=$$

$$=2r^2(4R+r)^2-\left[2r^2\left((4R+r)^2-p^2\right)\right]=2r^2p^2=2S^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a(p-a)=2r(4R+r)$ și $\sum a^2(p-a)^2=2r^2\left[(4R+r)^2-p^2\right]$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Aplicația 6. *În* $\triangle ABC$ *avem*

$$\frac{x}{y+z}a^2(b+c)^2+\frac{y}{z+x}b^2(c+a)^2+\frac{z}{x+y}c^2(a+b)^2\geq 32S^2,\ \textit{unde}\ x,y,z>0.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție: Avem

$$\sum \frac{x}{y+z}a^2(b+c)^2 = \sum \left(\frac{x}{y+z}+1-1\right)a^2(b+c)^2 = \sum \frac{x+y+z}{y+z}a^2(b+c)^2 - \sum a^2(b+c)^2$$

$$\overset{Bergstrom}{\geq} (x+y+z)\frac{\left(\sum a(b+c)\right)^2}{\sum (y+z)} - \sum a^2(b+c)^2$$

$$= (x+y+z)\frac{\left(2\left(p^2+r^2+4Rr\right)\right)^2}{2(x+y+z)} - 2\left[p^4+2p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\left(p^2+r^2+4Rr\right)\right)^2 - 2\left[p^4+2p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right] = 16p^2Rr \geq 32p^2r^2 = 32S^2.$$

Mai sus am folosit identitățile cunoscute în triunghi:

$\sum a(b+c) = 2\sum bc = 2\left(p^2+r^2+4Rr\right)$ și $\sum a^2(b+c)^2 = 2\left[p^4+2p^2r^2+r^2(4R+r)^2\right]$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. □

Bibliografie

[1] D.M. Bătinețu-Giurgiu, M. Lukarevski, *Romanian Mathematical Magazine*, Founding Editor Daniel Sitaru, JP. 105, Winter Edition 2017.

[2] O. Bottema, R.Z. Djordjevic, R.R. Janic, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasic, *Geometric Inequalities*, The Netherlands, Groningen, 1969.

[3] M. Chirciu, *Inegalități algebrice, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2014.

[4] M. Chirciu, *Inegalități cu laturi și raze în triunghi, de la inițiere la performanță*, Editura Paralela 45, Pitești, 2017.

[5] G. Tsintsifas, *Crux Mathematicorum*, Nr. 11/1986.

On a Crux open problem

Leonard Mihai Giugiuc [1] *și Ardak Mirzakhmedov* [2]

In the volume 43, issue 3 of Crux Mathematicorum Magazine, has been featured the following problem:

Let m be a positive real number. Prove (or disprove) that for all $a, b, c \geq 0$ with $a+b+c = ab+bc+ca > 0$, the following inequality holds:

$$(ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \geq \min\{3, 4^m\}.$$

(Leonard Giugiuc)

Also, the problem has been promoted in varies specialized communities, but no one answered to date.

Meanwhile, the author and Ardak Mirzakhmedov, Kazakhstan, found, independently, a solution based on same principles.

We present below their proof.

First, we'll consider $m \in \left(0, \dfrac{\ln 3}{2\ln 2}\right] \Rightarrow m < 1$.

Let $a+b+c = ab+bc+ac = k$. Since $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$ then $k^2 \geq 3k$ and since $k > 0$ then we deduce that $k \geq 3$.

Choose WLOG $bc = \max\{ab, bc, ac\}$. From above, $bc \geq 1$. Also, $a = \dfrac{b+c-bc}{b+c-1}$.

Denote $b+c = 2s$ and $bc = p^2$. By $AM-GM s \geq p$, from above $p \geq 1$ and $a = \dfrac{2s-p^2}{2s-1}$.

Case 1: $1 \leq p \leq 2$. For any p thus fixed, consider the function $f_p(t) = \dfrac{2t-p^2}{2t-1}$ on $[p, \infty)$. Since $p^2 \geq 1$, then clearly f_p is increasing $\Rightarrow f_p(s) \geq f_p(p) \Rightarrow a = \dfrac{2s-p^2}{2s-1} \geq \dfrac{2p-p^2}{2p-1} = \left(\dfrac{2-p}{2p-1}\right)p$.

By the $AM-GM$ inequality, $(ab)^m + (ca)^m \geq 2a^m p^m$. But $a \geq \left(\dfrac{2-p}{2p-1}\right)p \Rightarrow (ab)^m + (ca)^m \geq 2\left(\dfrac{2-p}{2p-1}\right)^m p^{2m}$.

Since $(bc)^m = p^{2m}$, we get:

$$(ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \geq p^{2m} + 2\left(\frac{2-p}{2p-1}\right)^m p^{2m} = p^{2m}\left[1 + 2\left(\frac{2-p}{2p-1}\right)^m\right], \ \forall p \in [1,2].$$

[1] Professor, Colegiul Național, ,,Traian", Drobeta Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com
[2] Almaty, Kazakhstan, ardak_agu@yahoo.com

Suffice it to prove that $p^{2m}\left[1+2\left(\frac{2-p}{2p-1}\right)^m\right]\geq 4^m$, $\forall p\in[1,2]$ (because $4^m\leq 3$).

Define the function $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ as $g(x)=x^{2m}\left[1+2\left(\frac{2-x}{2x-1}\right)^m\right]$, $\forall x\in[1,2]$.

Clearly, g is continuous. Moreover, it is differentiable on $[1,2)$.

We have: $g'(x)=2mx^{2m-1}\left(\frac{2-x}{2x-1}\right)^{m-1}\left[\left(\frac{2-x}{2x-1}\right)^{1-m}-\frac{4x^2-7x+4}{(2x-1)^2}\right]$, $\forall x\in[1,2)$.

So for finding the minimum of g on the interval $[1,2]$, suffice it to determine the sign of the expression $\left(\frac{2-x}{2x-1}\right)^{1-m}-\frac{4x^2-7x+4}{(2x-1)^2}$ on the interval $[1,2)$.

Denote $2x-1=y$. Then $y\in[1,3)$, $x=\frac{y+1}{2}$ and $\left(\frac{2-x}{2x-1}\right)^{1-m}-\frac{4x^2-7x+4}{(2x-1)^2}=\left(\frac{3-y}{2y}\right)^{1-m}-\frac{2y^2-3y+3}{2y^2}$.

Define now the function $h:[1,3)\to\mathbb{R}$ as $h(y)=\left(\frac{3-y}{2y}\right)^{1-m}-\frac{2y^2-3y+3}{2y^2}$, $\forall y\in[1,3)$. We have: $h'(y)=\frac{3}{2y^2}\left[-(1-m)\left(\frac{2y}{3-y}\right)^m-1+\frac{2}{y}\right]$, $\forall y\in[1,3)$.

But the function $\left(\frac{2y}{3-y}\right)^m$ is strictly increasing on $[1,3)$ (as composite of increasing) and the function $\frac{2}{y}$ is strictly decreasing on $[1,3)$ and since $1-m>0$, we deduce that the function $\varphi(y)=-(1-m)\left(\frac{2y}{3-y}\right)^m-1+\frac{2}{y}$ is strictly decreasing on $[1,3)$.

On the other hand, $\varphi(1)=m>0$ and $\varphi(3-0)=-\infty<0$, $\exists!y_0\in(1,3)$ such that $\varphi(y_0)=0$.

Further, $\varphi(y)>0\ \forall y\in[1,y_0)$ and $\varphi(y)<0\ \forall y\in(y_0,3)\Rightarrow h'(y)>0\ \forall y\in[1,y_0)$ and $h'(y)<0\ \forall y\in(y_0,3)$.

But $h(1)=0$ and $h(3-0)=-\frac{2}{3}<0$. Since h is strictly increasing on $[1,y_0]$ and strictly decreasing on $[y_0,3)$, then $\exists!y_1\in(y_0,3)$ such that $h(y_1)=0$.

We deduce from here that for a certain $x_0\in(1,2)$ $g'(x)>0\ \forall x\in(1,x_0)$ and $g'(x)<0\ \forall x\in(x_0,2)$.

In conclusion, $\min g=\min\{g(1),g(2)\}=4^m$. Let's remark that if $m=\frac{\ln 3}{2\ln 2}$, then $4^m=3$ and equality holds at $(1,1,1)$ or at $(2,2,0)$ and permutations and if $m<\frac{\ln 3}{2\ln 2}$, then equality holds only at $(2,2,0)$ and permutations.

Case 2: $p>2$.

We have: $(ab)^m+(bc)^m+(ca)^m\geq(bc)^m>4^m$.

Let study now for $m>\frac{\ln 3}{2\ln 2}$.

Let $\dfrac{\ln 3}{2\ln 2}=s$. From Holder's inequality, $\left[\dfrac{(ab)^m+(bc)^m+(ca)^m}{3}\right]^s \geq \left[\dfrac{(ab)^s+(bc)^s+(ca)^s}{3}\right]^m$.

Also, from above, $\dfrac{(ab)^s+(bc)^s+(ca)^s}{3}\geq 1 \Rightarrow$

$$\left[\frac{(ab)^s+(bc)^s+(ca)^s}{3}\right]^m \geq \left[\frac{(ab)^s+(bc)^s+(ca)^s}{3}\right]^s \Rightarrow$$

$$\left[\frac{(ab)^m+(bc)^m+(ca)^m}{3}\right]^s \geq \left[\frac{(ab)^s+(bc)^s+(ca)^s}{3}\right]^s \Rightarrow$$

$$(ab)^m+(bc)^m+(ca)^m \geq (ab)^s+(bc)^s+(ca)^s \geq 3=\min\left\{3,4^m\right\}.$$

The proof is complete. And the problem is closed as well.

Bibliografy

[1] https://cms.math.ca/crux/v43/n3/Solutions_43_3.pdf, page 115.

A dynamic identity in a triangle and some applications

Thanos Kalogerakis [1]

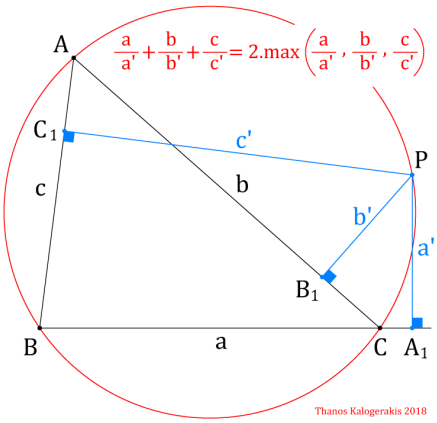


Figure 1

Theorem 1. *Consider a triangle ABC and P any point on its circumcircle except A, B, C (see Figure 1).*

If a', b', c' are the distances of P to the sidelines of ABC, then the following identity is true:

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 2 \cdot \max\left\{\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}\right\}.$$

Solution: Since $C_1B_1A_1$ is the ***Simson line of*** ABC ***wrt to*** P**,** we have, from areas equality,

$$2\mathcal{A}_{PC_1A_1} = 2\mathcal{A}_{PC_1B_1} + 2\mathcal{A}_{PB_1A_1} \Leftrightarrow a'c' \sin\widehat{B} = b'c' \sin\widehat{A} + a'b' \sin\widehat{C} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\widehat{B}}{b'} = \frac{\sin\widehat{A}}{a'} + \frac{\sin\widehat{C}}{c'} \overset{\text{sines low}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{b}{2Rb'} = \frac{a}{2Ra'} + \frac{c}{2Rc'} \Leftrightarrow \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} + \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 2\frac{b}{b'} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 2 \cdot \max\left\{\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}\right\}. \tag{1}$$

□

Remark 1. We can keep the easiest form, $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} + \frac{c}{c'}$, considering P lying on ***minor arc*** AC or cyclic, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}$, with P lying on ***minor arc*** BC and $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'}$, with P lying on ***minor arc*** AB.

[1]Mechanical Engineer, National Technical University of Athens, Kiato, Korinthia, Greece, kalogerakis@hol.gr

Applications

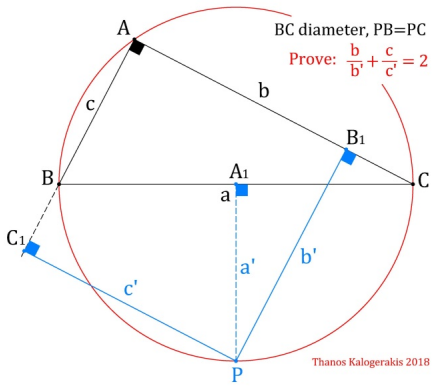


Figure 2

Problem 1. *Consider an A-righted triangle ABC. From the midpoint P of arc BC (not containing A) of its circumcircle, we draw perpendiculars $PB_1 = b'$, $PC_1 = c'$ to $AC = b$, $AB = c$ respectively.*

$$\textit{Prove: } \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 2.$$

Solution: Since $a = BC = 2R = 2 \cdot PA_1 = 2a'$, identity (1) gives directly the desired result. □

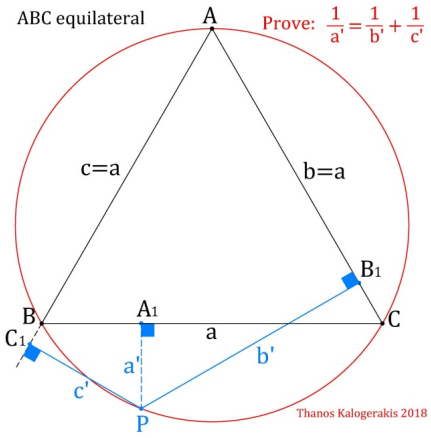


Figure 3

Problem 2. *Consider an equilateral triangle ABC. From a point P of arc BC (not containing A) of its circumcircle, we draw perpendiculars $PA_1 = a'$, $PB_1 = b'$ and $PC_1 = c'$ to BC, AC and AB respectively.*

$$\textit{Prove: } \frac{1}{a'} = \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}.$$

Solution: Since $a = b = c$, identity (1) gives directly the desired result. □

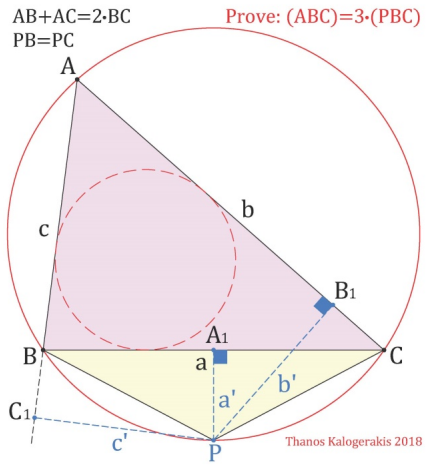


Figure 4

Problem 3. *Consider a special triangle ABC with $b + c = 2a$. From the midpoint P of arc BC (not containing A) of its circumcircle, we draw perpendiculars $PA_1 = a'$, $PB_1 = b'$ and $PC_1 = c'$ to BC, AC and AB respectively.*

$$\textit{Prove: } \mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{PBC}.$$

Solution: Obviously $b' = c' = d$, and identity (1), using $b + c = 2a$, gives $a' = d/2$ and $\mathcal{A}_{PBC} = ad/4$.

But, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABPC} - \mathcal{A}_{BPC} = (cd/2 + bd/2) - (ad/4) = (2ad/2) - (ad/4) = 3ad/4 = 3\mathcal{A}_{PBC}$, so $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{PBC}$. □

Remark 2. Using the last result, we can prove that in such triangles with $b+c=2a$ we have $a'=d/2=r$, where r is the ABC-inradius, and the A-altitude is three times the ABC-inradius.

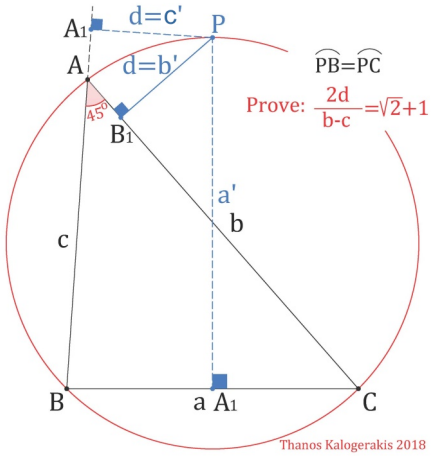


Figure 5

Problem 4. *Consider a triangle ABC with $\widehat{A}=45^\circ$. From a point P of arc AC (not containing B) of its circumcircle, we draw perpendicular $PB_1=d$ to AC.*

Prove: $\dfrac{2d}{b-c}=\sqrt{2}+1.$

Solution: We draw the other two perpendiculars according to the identity (1). Obviously $c'=b'=d$ and

$$\frac{a}{a'}=2\cdot\tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right). \tag{2}$$

Identity (1) gives $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{a}{a'}+\dfrac{c}{c'}\Leftrightarrow\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}-\dfrac{c}{c'}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}2\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{a}{a'}=\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{b-c}{d}\Rightarrow$$

$$\frac{2d}{b-c}=\sqrt{2}+1.$$

□

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Vectori de frecvențe

Ion Alexandru Popescu [1]

Acest articol își propune să prezinte o noțiune importantă în programarea clasică numită *vector de frecvențe* și să ofere câteva aplicații ce pot fi considerate ,,clasice", iar în partea finală să dea șansa cititorului de a utiliza cele prezentate pentru rezolvarea unor probleme date la examenul de bacalaureat în ultima perioadă.

Noțiuni preliminarii

Definiția 1. *Fie* Max *și* n *două numere naturale,* Max ≤ 1000, $n \leq 1000000$ *și* $M = \{0, 1, 2, \ldots, \text{Max}\}$. *Prin vector de dimensiune* n *cu elemente în mulțimea* M *înțelegem un element* x *din* $M \times M \times \ldots \times M$. *Produsul cartezian are* n *mulțimi.*

Exemplul 1. Pentru Max $= 10$, $n = 5$, un exemplu de vector de dimensiune 5 este $x = (1, 6, 0, 9, 6)$.

Observația 1. În continuare toți vectorii vor fi considerați cu elemente în mulțimea $M = \{0, 1, 2, \ldots, \text{Max}\}$, Max fiind număr natural fixat, Max ≤ 1000.

Definiția 2. *Fie* x *un vector de dimensiune* n *cu elemente în* M. *Definim vectorul de frecvențe asociat lui* x *ca fiind vectorul* $f_x = (f_x[0], f_x[1], \ldots, f_x[\text{Max}])$, *unde* $f_x[i] =$ *numărul de componente din* x *egale cu* i, $0 \leq i \leq$ Max.

Exemplul 2. Pentru Max $= 6$, $n = 8$, $x = (1, 4, 0, 4, 5, 2, 5, 5)$ vectorul de frecvențe este $f_x = (1, 1, 1, 0, 2, 3, 0)$.

Definiția 3. *Fie* x *și* y *doi vectori de dimensiuni* m, *respectiv* n *cu elemente în* M. *Dacă* $m = n$ *și* $x[i] = y[i]$, *pentru orice* i, $1 \leq i \leq n$, *atunci* x *și* y *sunt egali* $(x = y)$.

Propoziția 1. *Fie* x *un vector de dimensiune* n *cu elemente în* M. x *reprezintă o mulțime dacă și numai dacă* f_x *conține numai elemente de* 0 *și* 1.

Demonstraţie. Vectorul x reprezintă o mulțime dacă și numai dacă componentele sale sunt distincte, proprietate echivalentă cu: frecvența fiecărei componente egală cu 1. Dacă un număr din M nu este în x, atunci are frecvența egală cu 0 și astfel proproziția este demonstrată. □

Propoziția 2. *Fie* x *și* y *doi vectori de dimensiune* n *cu elemente în* M. x *și* y *conțin aceleași elemente, eventual în altă ordine, dacă și numai dacă* $f_x = f_y$.

[1]Student, Universitatea din Pitești și A.S.E. București, alexionpopescu@gmail.com

Demonstrație. Demonstrația este imediată, pentru că ordinea elementelor într-un vector nu afectează vectorul de frecvențe. □

Propoziția 3. *Fie x un vector de dimensiune n cu elemente în M. Numărul de componente distincte din x este egal cu* $\text{card}\{i|i \in M \text{ și } f_x[i] > 0\}$.

Demonstrație. Numărul de componente distincte din x este egal cu numărul de elemente k din M care se găsesc în x, lucru echivalent cu $f_x[k] > 0$, astfel rezultă afirmația din propoziție. □

Observația 2. Dacă pentru un vector x, în loc de frecvența de apariție a lui i în x ($0 \leq i \leq \text{Max}$), reținem pentru $f_x[i]$ valoarea 1 dacă i este în x și 0, în caz contrar, atunci f_x se va numi *vectorul caracteristic* asociat lui x.

Exemplul 3. Pentru $\text{Max} = 6$, $n = 8$, $x = (1, 4, 0, 4, 5, 2, 5, 5)$ *vectorul caracteristic* asociat lui x este $f_x = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$.

Observația 3. Vectorii caracteristici pot fi folosiți pentru memorarea mulțimilor și efectuarea operațiilor specifice, obținând astfel algoritmi eficienți.

Tipuri standard de probleme ce pot fi rezolvate cu vectori de frecvență

1. *Ordonarea unui vector*

Se dă n și componentele unui vector x, valori mai mici sau egale cu 1000. Se cere să se afișeze componentele vectorului x în ordine crescătoare.

Exemplu

Intrare

7

3 12 4 3 9 3 9

Ieșire

3 3 3 4 9 9 12

Soluție

I. $\text{Max} = 0$

II. Citim n și componentele vectorului în variabila k. Pentru fiecare k actualizăm Max (cea mai mare componentă din x) și $f_x[k] = f_x[k] + 1$. Astfel x are elementele în $M = \{0, 1, \ldots, \text{Max}\}$ și f_x este vectorul de frecvențe.

III. Afișăm componentele lui x ordonate crescător folosind vectorul de frecvențe f_x, astfel: pentru orice k din mulțimea M, afișăm k de $f_x[k]$ ori.

Pentru exemplul considerat: $\text{Max} = 12$, $f_x[3] = 3$, $f_x[4] = 1$, $f_x[9] = 2$, $f_x[12] = 1$, iar celelalte componente ale lui f_x sunt 0. Se va afișa 3 de 3 ori, 4 o dată, 9 de două ori și 12 o dată.

2. *Determinarea componentelor distincte dintr-un vector*

Se dă n și componentele unui vector x, valori mai mici sau egale cu 1000. Se cere să se afișeze componentele distincte din x în ordine crescătoare.

Exemplu

Intrare

7

3 12 4 3 9 3 9

Ieșire

3 4 9 12

Soluție

I. Determinăm Max și f_x ca la problema 1.

II. Afișăm componentele distincte din x astfel: pentru orice k din M, dacă $f_x[k] > 0$, atunci afișăm k.

Pentru exemplul considerat: Max = 12, $f_x[3] = 3$, $f_x[4] = 1$, $f_x[9] = 2$, $f_x[12] = 1$, iar celelalte componente ale lui f_x sunt 0. Se va afișa 3 4 9 12.

3. *Verificarea condiției de mulțime pentru un vector*

Se dă n și componentele unui vector x, valori mai mici sau egale cu 1000. Se cere să se verifice condiția de mulțime pentru vectorul x.

Exemplul 1

Intrare

7

3 12 4 3 9 3 5

Ieșire

NU

Exemplul 2

Intrare

4

3 12 4 9

Ieșire

DA

Soluție

I. Determinăm Max și f_x ca la problema 1.

II. OK=1

III. Parcurgem elemente mulțimii M folosind variabila k și dacă $f_x[k] > 1$, atunci OK=0.

IV. Dacă OK=1 afișăm DA, altfel NU.

4. *Determinarea cifrelor distincte dintr-un număr natural*

Se dă un număr natural k. Se cere să se determine cifrele distincte din k în ordine crescătoare.

Intrare

2382364

Ieșire

2 3 4 6 8

Soluție

I. Max = 9 și astfel $M = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

II. Scoatem cifrele din k în variabila i și de fiecare dată frecvența lui i crește cu 1 ($f[i] = f[i] + 1$).

III. Afișăm cifrele lui k astfel: pentru orice i din mulțimea M, afișăm i dacă $f[i] > 0$.

Pentru exemplul considerat: Max = 9, $f_x[2] = 2$, $f_x[3] = 2$, $f_x[4] = 1$, $f_x[6] = 1$, $f_x[8] = 1$, iar celelalte componente ale lui f_x sunt 0. Astfel, se afișează 2 3 4 6 8.

Probleme propuse spre rezolvare cu vectori de frecvență

1. Pentru un număr natural n din intervalul $[1, 10^{15}]$ se cere să se afișeze cel mai mare și cel mai mic număr, care se pot forma cu cifrele sale.

Exemplu

Intrare: 200217

Ieșite: 722100 100227

2. Un șir de numere este o progresie aritmetică de rație r dacă oricare termen al său, cu excepția primului, se obține din cel care îl precede, prin adunarea la acesta a numărului r. Exemplu: șirul 12, 14, 16, 18, 20 este o progresie de rație 2. Fișierul `bac.in` conține un șir de cel mult 106 numere naturale din intervalul [0,103], separate prin câte un spațiu. Se cere să se verifice dacă există un număr natural r, astfel încât toate numerele distincte din șir să poată fi rearanjate pentru a forma o progresie aritmetică de rație r. Se afișează pe ecran numărul r, sau mesajul NU, dacă nu există un astfel de număr. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare.

Exemplu

Intrare: 180 30 80 280 130 330 230 30 30 330 80

Ieșire: 50

Bacalaureat, sesiunea august-septembrie, 2017

3. Fișierul `bac.txt` conține un șir de cel mult un milion de numere naturale din intervalul [0,102], separate prin câte un spațiu. Se cere să se determine toate perechile distincte formate din termeni ai șirului aflat în fișier, x și y ($y - x \geq 2$), astfel încât să nu existe niciun termen al șirului care să aparțină intervalului (x, y). Numerele din fiecare pereche sunt afișate pe câte o linie a ecranului, în ordine strict crescătoare, separate printr-un spațiu, iar dacă nu există

nicio astfel de pereche, se afișează pe ecran mesajul `nu exista`. Pentru determinarea numerelor cerute utilizați un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare.

Exemplu

Intrare:

5 9 0 8 10 11 12 13 15 14 6 7 40 10 0 0 5 41 95 7

Ieșire:

0 5

15 40

41 95

Bacalaureat, sesiunea iulie, 2015

4. Fișierul `bac.txt` conține un șir de cel puțin trei și cel mult 1000000 de numere naturale cu cel mult nouă cifre. Numerele din șir sunt separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran, separate printr-un spațiu, două numere distincte, anume cel mai mic număr par cu două cifre și cel mai mare număr par cu două cifre care NU fac parte din șir. Dacă nu există două astfel de valori, pe ecran se afișează mesajul `Nu exista`. Pentru determinarea numerelor cerute se utilizează un algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare.

Exemplu

Intrare: 7 2 40 5 10 15 11 12 18 350

Ieșire: 14 98

Bacalaureat, sesiunea specială - mai, 2013

5. Fișierul text `numere.txt` conține pe prima linie un număr natural n ($0 < n < 100000$), iar pe a doua linie un șir format din n cifre, separate prin câte un spațiu. Scrieți un program C/C++ care determină în mod eficient din punct de vedere al timpului de executare, cea mai mare cifră dintre cele situate pe a doua linie a fișierului, precum și numărul de apariții ale acesteia. Cele două numere vor fi afișate pe o singură linie a ecranului, separate printr-un spațiu.

Exemplu

Intrare:

7

3 5 2 1 5 3 1

Ieșire:

5 2

Bacalaureat, varianta 41, 2009

Concluzii

Vectorii de frecvență conduc la algoritmi eficienți din punct de vedere al timpului de execuție, dacă datele care se procesează sunt cu valori numere naturale într-un interval $[0, \text{Max}]$, Max cu cel mult 5-6 cifre.

Varietatea mare de probleme ce se rezolvă cu vectori de frecvențe de pe site-urile de programare precum *.campion*, *infoarena* sau *varena* și numărul mare de probleme date la examenele de bacalaureat din ultimii ani impun studiul acestora la orele de informatică din liceu și la cursurile primului an de facultate.

Bibliografie

[1] *Arhiva educațională .campion*, http://campion.edu.ro/arhiva/

[2] *Arhiva educațională infoarena*, https://www.infoarena.ro/

[3] *Site de pregătire pentru programare varena*, http://varena.ro/

[4] A. Boca, D.A. Popescu, V. Tudor, M. Ionescu, *Manual școlar pentru clasa a VIII-a*, Ed. L&S InfoMat, 2018.

[5] D. Lica, M. Pașoi, *Fundamentele programării*, Ed. L&S InfoMat, 2018.

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Determinarea ultimei cifre nenule pentru produse de numere naturale

Stelian Corneliu Andronescu [1], *Costel Bălcău* [2], *Doru Constantin* [3] *și Doru Anastasiu Popescu* [4]

În acest articol vom prezenta algoritmi eficienți pentru determinarea ultimei cifre nenule a unui număr natural, a unui produs de numere naturale și a factorialului unui număr natural.

Determinarea ultimei cifre nenule a unui număr natural

Definiția 1. *a) Pentru orice număr natural m (scris în baza 10), notăm cu $u(m)$* ***ultima cifră*** *a numărului m.*

b) Pentru orice număr natural nenul m, notăm cu $r(m)$ ***ultima cifră nenulă*** *a numărului m.*

Observația 1. Evident, $u(m) = m \text{ MOD } 10$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem $r(m) = \frac{m \text{ MOD } 10^k}{10^{k-1}}$, unde k este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că $m \text{ MOD } 10^k \neq 0$.

Cifra $r(m)$ poate fi calculată prin împărțiri succesive la 10, cât timp restul este egal cu zero, algoritm care are complexitatea $\mathcal{O}(\ln m)$. Într-adevăr, numărul de împărțiri succesive la 10 este egal cu 1 plus numărul de zerouri în care se termină m, deci în cazul cel mai defavorabil, și anume când $m = \overline{c_1 00\ldots 0}$, se efectuează $1 + [\lg m]$ împărțiri ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x). Definițiile și proprietăți ale ordinelor de complexitate ale algoritmilor pot fi găsite, de exemplu, în [1].

Un algoritm echivalent pentru calculul lui $r(m)$, util în secțiunile următoare, se bazează pe următoarea proprietate.

Propoziția 1. *Pentru orice număr natural nenul m există un unic triplet (a, b, c) cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $c \in \{1, 3, 7, 9\}$ astfel încât*

$$m = 2^a \cdot 5^b \cdot (\mathcal{M}10 + c) \tag{1}$$

(notația $\mathcal{M}10$ reprezintă un multiplu al lui 10).

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com
[2]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com
[3]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, doru.constantin@upit.ro
[4]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

Demonstrație. Fie $a = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \text{ divide } m\}$ și $b = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 5^k \text{ divide } m\}$. Atunci $m = 2^a \cdot 5^b \cdot p$, unde p este un număr natural care nu se divide nici cu 2, nici cu 5. Notând $c = u(p)$, rezultă că $m = 2^a \cdot 5^b \cdot (\mathcal{M}10 + c)$ și $c \in \{1, 3, 7, 9\}$.

Demonstrăm acum unicitatea scrierii (1). Într-adevăr, fie

$$m = 2^a \cdot 5^b \cdot (\mathcal{M}10 + c) = 2^{a'} \cdot 5^{b'} \cdot (\mathcal{M}10 + c'), \text{ cu } a, b, a', b' \in \mathbb{N} \text{ și } c, c' \in \{1, 3, 7, 9\}.$$

Cum $5^b \cdot (\mathcal{M}10 + c)$ nu se divide cu 2, rezultă că $2^{a'}$ divide 2^a, deci $a' \leq a$. Analog se obține că 2^a divide $2^{a'}$, deci $a \leq a'$ și astfel $a = a'$. Analog se arată că $b = b'$. Rezultă că $\mathcal{M}10 + c = \mathcal{M}10 + c'$, deci și $c = c'$. □

Definiția 2. *Pentru orice număr natural nenul m, notăm cu $a(m)$, $b(m)$ și $c(m)$ numerele a, b, respectiv c din scrierea (1).*

Propoziția 2. *Pentru orice număr natural nenul m avem*

$$r(m) = \begin{cases} c(m), & \text{dacă } a(m) = b(m), \\ 5, & \text{dacă } a(m) < b(m), \\ u\left(2^{a(m)-b(m)} \cdot c(m)\right), & \text{dacă } a(m) > b(m). \end{cases}$$

Demonstrație. Conform definiției anterioare, $m = 2^{a(m)} \cdot 5^{b(m)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m))$, cu $a(m), b(m) \in \mathbb{N}$ și $c(m) \in \{1, 3, 7, 9\}$.

Cazul 1. Dacă $a(m) = b(m)$, atunci $m = 10^{a(m)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m))$, deci m se termină în $a(m)$ zerouri și ultima cifră nenulă a sa este $c(m)$.

Cazul 2. Dacă $a(m) < b(m)$, atunci $m = 10^{a(m)} \cdot 5^{b(m)-a(m)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m))$, deci m se termină în $a(m)$ zerouri și ultima sa cifră nenulă este $u\left(5^{b(m)-a(m)} \cdot c(m)\right) = 5$.

Cazul 3. Dacă $a(m) > b(m)$, atunci $m = 10^{b(m)} \cdot 2^{a(m)-b(m)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m))$, deci m se termină în $b(m)$ zerouri și ultima sa cifră nenulă este $u\left(2^{a(m)-b(m)} \cdot c(m)\right)$. □

Observația 2. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $u\left(2^k\right) = u\left(6 \cdot 2^{k \text{ MOD } 4}\right)$, deci formula lui $r(m)$ dată de Propoziția 2 poate fi rescrisă sub forma:

$$r(m) = \begin{cases} c(m), & \text{dacă } a(m) = b(m), \\ 5, & \text{dacă } a(m) < b(m), \\ u\left(6 \cdot 2^{(a(m)-b(m)) \text{ MOD } 4} \cdot c(m)\right), & \text{dacă } a(m) > b(m). \end{cases}$$

Exemplul 4. $15300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 153$, deci $a(15300) = b(15300) = 2$, $c(15300) = 3$ și $r(15300) = 3$.

$23500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 47$, deci $a(23500) = 2$, $b(23500) = 3$, $c(23500) = 7$ și $r(23500) = 5$.

$42240 = 2^8 \cdot 5 \cdot 33$, deci $a(42240) = 8$, $b(42240) = 1$, $c(42240) = 3$ și $r(42240) = u\left(6 \cdot 2^{(8-1) \text{ MOD } 4} \cdot 3\right) = u(6 \cdot 2^3 \cdot 3) = 4$.

Obținem astfel următorul algoritm pentru determinarea lui $r(m)$.

UCN(m)**:**
$p \leftarrow m$; $a \leftarrow 0$; $b \leftarrow 0$;
while p *MOD* $2 = 0$ **do**
  $a \leftarrow a + 1$; $p \leftarrow p/2$;
while p *MOD* $5 = 0$ **do**
  $b \leftarrow b + 1$; $p \leftarrow p/5$;
$c \leftarrow p$ MOD 10;
if $a = b$ **then**
  return c;
else
  if $a < b$ **then**
    return 5;
  else
    for $i = \overline{1,\ (a-b)\ MOD\ 4}$ **do**
      $c \leftarrow 2 \cdot c$;
    return $(6 \cdot c)$ MOD 10;

Propoziția 3. *Algoritmul UCN are complexitatea* $\Theta(a(m) + b(m) + 1)$.

Demonstraţie. Conform Definiției 2 avem $m = 2^{a(m)} \cdot 5^{b(m)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m))$, cu $a(m), b(m) \in \mathbb{N}$ și $c(m) \in \{1, 3, 7, 9\}$. Corpul primului ciclu **while** din algoritmul UCN are două instrucțiuni și se execută de $a(m)$ ori, corpul celui de-al doilea ciclu **while** are tot două instrucțiuni și se execută de $b(m)$ ori, iar corpul ciclului **for** are o instrucțiune și se execută de cel mult 3 ori. Algoritmul mai conține 4 atribuiri și una sau două comparații, deci are complexitatea $\Theta(a(m) + b(m) + 1)$. □

Corolarul 1. *Algoritmul UCN are complexitatea* $\mathcal{O}(\ln m)$.

Demonstraţie. Avem $2^{a(m)} \leq m$ și $5^{b(m)} \leq m$, deci $a(m) \leq \log_2 m$ și $b(m) \leq \log_5 m$. Obținem că $a(m) + b(m) + 1 \leq \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 5}\right) \ln m + 1$, deci conform propoziției anterioare rezultă că algoritmul UCN are complexitatea $\mathcal{O}(\ln m)$. □

Observația 3. Mai mult, în cazul când m este o putere a lui 2, adică $m = 2^{a(m)}$, avem $b(m) = 0$ și astfel $a(m) + b(m) + 1 = \log_2 m + 1 = \frac{\ln m}{\ln 2} + 1$. Conform rezultatelor anterioare rezultă că algoritmul UCN are timpul de execuție în acest caz particular chiar de ordinul $\Theta(\ln m)$, care este mai precis decât $\mathcal{O}(\ln m)$. Evident, același ordin se obține și în cazul când m este o putere a lui 5 sau a lui 10, și nu numai.

Determinarea ultimei cifre nenule a produsului unor numere naturale

În această secțiune ne propunem să determinăm ultima cifră nenulă a produsului $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$, adică $r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n)$, unde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt numere naturale nenule arbitrare, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Observația 4. Evident, $u(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = u\left(u(m_1) \cdot u(m_2) \cdot \ldots \cdot u(m_n)\right)$, pentru orice $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$.

Pe de altă parte, egalitatea $r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = u\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right)$ este adevărată doar dacă $u\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right) \neq 0$. Mai mult, egalitatea $r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = r\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right)$ este adevărată dacă $u\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right) \neq 0$ și nu este neapărat adevărată în caz contrar.

De exemplu, $r(320 \cdot 170) = 4 = u\left(r(320) \cdot r(170)\right) = r\left(r(320) \cdot r(170)\right)$, dar $r(320 \cdot 150) = 8$ iar $u\left(r(320) \cdot r(150)\right) = 0$ și $r\left(r(320) \cdot r(150)\right) = 1$.

Propoziția 4. *Pentru orice numere naturale nenule $m_1, m_2, \ldots, m_n$ avem*

$$\begin{aligned} a(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) &= a(m_1) + a(m_2) + \ldots + a(m_n), \\ b(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) &= b(m_1) + b(m_2) + \ldots + b(m_n), \\ c(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) &= u\left(c(m_1) \cdot c(m_2) \cdot \ldots \cdot c(m_n)\right). \end{aligned}$$

Demonstraţie. Avem $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n = \prod_{i=1}^{n} \left(2^{a(m_i)} \cdot 5^{b(m_i)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(m_i))\right) = 2^{\sum_{i=1}^{n} a(m_i)} \cdot 5^{\sum_{i=1}^{n} b(m_i)} \cdot \left(\mathcal{M}10 + u\left(\prod_{i=1}^{n} c(m_i)\right)\right)$, de unde rezultă egalitățile din enunț. □

Următorul rezultat este o consecință imediată a Propozițiilor 4 și 2 și a Observației 2.

Corolarul 2. *Fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere naturale nenule.*

a) Dacă $a(m_1) + a(m_2) + \ldots + a(m_n) = b(m_1) + b(m_2) + \ldots + b(m_n)$, atunci

$$r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = u\left(c(m_1) \cdot c(m_2) \cdot \ldots \cdot c(m_n)\right).$$

b) Dacă $a(m_1) + a(m_2) + \ldots + a(m_n) < b(m_1) + b(m_2) + \ldots + b(m_n)$, atunci

$$r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = 5.$$

c) Dacă $a(m_1) + a(m_2) + \ldots + a(m_n) > b(m_1) + b(m_2) + \ldots + b(m_n)$, atunci

$$r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = u\Big(6 \cdot 2^{(a(m_1)+a(m_2)+\ldots+a(m_n)-b(m_1)-b(m_2)-\ldots-b(m_n)) \ MOD \ 4} \cdot c(m_1) \cdot c(m_2) \cdot \ldots \cdot c(m_n)\Big).$$

Exemplul 5. $320 = 2^6 \cdot 5$ și $150 = 2 \cdot 5^2 \cdot 3$, deci $a(320) = 6$, $b(320) = 1$, $c(320) = 1$, $a(150) = 1$, $b(150) = 2$, $c(150) = 3$, $a(320) + a(150) = 7$, $b(320) + b(150) = 3$ și $r(320 \cdot 150) = u\left(6 \cdot 2^{(7-3) \text{ MOD } 4} \cdot 1 \cdot 3\right) = u(6 \cdot 2^0 \cdot 3) = 8$.

Obținem astfel următorul algoritm pentru determinarea lui $r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n)$.

UCNP(M, n)**:** // $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$
$a \leftarrow 0$; $b \leftarrow 0$; $c \leftarrow 1$;
for $k = \overline{1,\ n}$ **do**
  $p \leftarrow m_k$;
  while p *MOD* $2 = 0$ **do**
    $a \leftarrow a + 1$; $p \leftarrow p/2$;
  while p *MOD* $5 = 0$ **do**
    $b \leftarrow b + 1$; $p \leftarrow p/5$;
  $c \leftarrow (c \cdot p)$ MOD 10;
if $a = b$ **then**
  return c;
else
  if $a < b$ **then**
    return 5;
  else
    for $i = \overline{1,\ (a-b)\ MOD\ 4}$ **do**
      $c \leftarrow 2 \cdot c$;
    return $(6 \cdot c)$ MOD 10;

Propoziția 5. *Algoritmul UCNP are complexitatea* $\Theta(n + a(m_1) + b(m_1) + a(m_2) + b(m_2) + \ldots + a(m_n) + b(m_n))$.

Demonstraţie. Conform Propozițiilor 3 și 4, complexitatea algoritmului UCNP este

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{n}(1 + a(m_i) + b(m_i))\right) = \Theta\left(n + \sum_{i=1}^{n}(a(m_i) + b(m_i))\right)$$

. □

Corolarul 3. *Algoritmul UCNP are complexitatea* $\mathcal{O}\left(n + \ln(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n)\right)$.

Demonstraţie. Conform demonstrației Corolarului 1 avem

$$\sum_{i=1}^{n}(a(m_i) + b(m_i)) \leq \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 5}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln m_i,$$

deci conform propoziției anterioare rezultă că algoritmul UCNP are complexitatea

$$\mathcal{O}\left(n + \sum_{i=1}^{n}\ln m_i\right) = \mathcal{O}\left(n + \ln\prod_{i=1}^{n} m_i\right).$$

□

Determinarea ultimei cifre nenule a factorialului unui număr natural

În această secțiune ne propunem să determinăm ultima cifră nenulă a lui $n!$, adică $r(n!)$, unde n este un număr natural arbitrar. Avem nevoie de câteva rezultate pregătitoare.

Lema 2. *Dacă n este un număr natural nenul, atunci*

$$a(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right], \text{ unde } k = [\log_2 n]$$

și

$$b(n!) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{5^{k'}}\right], \text{ unde } k' = [\log_5 n].$$

Demonstraţie. $a(n!)$ reprezintă puterea lui 2 din descompunerea în factori primi a produsului $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Printre numerele $1, 2, \ldots, n$ avem exact $\left[\frac{n}{2}\right]$ numere divizibile cu 2, dintre care exact $\left[\frac{n}{2^2}\right]$ sunt divizibile și cu 2^2, dintre care exact $\left[\frac{n}{2^3}\right]$ sunt divizibile și cu 2^3, ș.a.m.d., deci

$$a(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots.$$

Cum $2^{k+1} > n$, deci printre numerele $1, 2, \ldots, n$ nu există numere divizibile cu 2^{k+1}, rezultă că suma anterioară se poate încheia cu termenul $\left[\frac{n}{2^k}\right]$. Analog se demonstrează și formula lui $b(n!)$ din enunț. □

Lema 3. *Avem $a(n!) = \Theta(n)$ și $b(n!) = \Theta(n)$.*

Demonstraţie. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $k = [\log_2 n]$. Conform lemei anterioare,

$$a(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right].$$

Avem $k \leq \log_2 n < k + 1$, deci $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Deducem că $2^{k-1} \leq \left[\frac{n}{2}\right] < 2^k$, $2^{k-2} \leq \left[\frac{n}{2^2}\right] < 2^{k-1}$,..., $2^0 \leq \left[\frac{n}{2^k}\right] < 2^1$, deci prin adunare obținem

$$2^k - 1 \leq a(n!) < 2(2^k - 1).$$

Cum $\log_2 n - 1 < k \leq \log_2 n$, rezultă că

$$\frac{n-2}{2} < a(n!) < 2n - 2,$$

deci $a(n!) = \Theta(n)$.

Analog se demonstrează că

$$\frac{n-5}{20} < b(n!) < \frac{5n-5}{4},$$

deci și $b(n!) = \Theta(n)$. □

Lema 4. *Avem $a(0!) = b(0!) = a(1!) = b(1!) = 0$ și $a(n!) > b(n!)$ pentru orice $n \geq 2$.*

Demonstraţie. Evident, $a(1) = b(1) = 0$. Pentru $n \geq 2$, cu notațiile din Lema 2, avem $k \geq k'$, $\left[\frac{n}{2}\right] > \left[\frac{n}{5}\right]$, $\left[\frac{n}{2^2}\right] \geq \left[\frac{n}{5^2}\right]$, ..., $\left[\frac{n}{2^{k'}}\right] \geq \left[\frac{n}{5^{k'}}\right]$, de unde prin adunare obținem că $a(n!) > b(n!)$. □

Lema 5. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numărul de zerouri în care se termină numărul $n!$ este egal cu $b(n!)$.*

Demonstraţie. Conform lemei anterioare, $a(n!) \geq b(n!)$, deci conform (1) avem $n! = 10^{b(n!)} \cdot 2^{a(n!)-b(n!)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(n!))$, de unde rezultă afirmația din enunț. □

Observația 5. Algoritmul pentru determinarea lui $r(n!)$ bazat pe calculul lui $n!$ are, conform Observației 1 și Lemelor 5 și 3, complexitatea $\Theta(n)$, dar este practic inoperabil pentru valori mari ale lui n din cauza mărimii numărului $n!$.

Cum $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ cu $m_k = k$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, înlocuind în algoritmul UCNP instrucțiunea $p \leftarrow m_k$ cu $p \leftarrow k$ obținem un algoritm pentru determinarea lui $r(n!)$ care evită calculul lui $n!$ și, conform Propozițiilor 5 și 4 și Lemei 3, are de asemenea complexitatea $\Theta(n)$.

Exemplul 6. $r(11!) = r(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11) = r(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11) = r\left(2^8 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1\right) = u\left(6 \cdot 2^{(8-2) \bmod 4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9\right) = 8.$

Totuși, acest procedeu este practic imposibil de aplicat pentru valori mari ale lui n, să zicem, 1918!, dacă nu se utilizează echipament electronic de calcul.

În continuare vom prezenta un algoritm mai eficient decât algoritmul descris în observația anterioară, și anume un algoritm subliniar pentru determinarea lui $r(n!)$. Avem nevoie de alte câteva rezultate.

Observația 6. Dacă m este un număr natural nedivizibil cu 10, atunci $u(m) \neq 0$, deci $r(m) = u(m)$.

Observația 7. Fie $m_1, m_2, \ldots, m_n$ numere naturale nenule astfel încât $r(m_i) \neq 5$ pentru orice $i = \overline{1,n}$. Atunci $u\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right) \neq 0$ și conform Observației 4 avem $r(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = u\left(r(m_1) \cdot r(m_2) \cdot \ldots \cdot r(m_n)\right)$.

Lema 6. *Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Atunci $r(n!) \in \{2,4,6,8\}$.*

Demonstraţie. Conform Lemei 4, $a(n!) > b(n!)$, deci conform (1) avem

$$n! = 10^{b(n!)} \cdot 2^{a(n!)-b(n!)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(n!)),$$

de unde rezultă că

$$r(n!) = r\left(2^{a(n!)-b(n!)} \cdot (\mathcal{M}10 + c(n!))\right).$$

Dar

$$r\left(2^{a(n!)-b(n!)}\right) = u\left(2^{a(n!)-b(n!)}\right) \in \{2,4,6,8\},$$
$$r\left(\mathcal{M}10 + c(n!)\right) = u\left(\mathcal{M}10 + c(n!)\right) = c(n!) \in \{1,3,7,9\},$$

deci, folosind și Observația 7, $r(n!) = u\left(r\left(2^{a(n!)-b(n!)}\right) \cdot c(n!)\right) \in \{2,4,6,8\}$. □

Lema 7. *Fie m și k două numere naturale astfel încât m este divizibil cu 2^{k+1}. Atunci*

$$u\left(m : 2^k\right) = u\left(m : 2^{k \ MOD \ 4}\right) = u\left(m \cdot 2^{4-(k \ MOD \ 4)}\right).$$

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $m = 2^{k+p} \cdot y$, cu $p \in \mathbb{N}^*$ și y impar. Avem

$$u\left(m : 2^k\right) = u\left(2^p \cdot y\right) = u\left(u(2^p) \cdot u(y)\right),$$
$$\begin{aligned} u\left(m : 2^{k \bmod 4}\right) &= u\left(2^p \cdot 2^{k-(k \bmod 4)} \cdot y\right) = u\left(u(2^p) \cdot u(2^{k-(k \bmod 4)}) \cdot u(y)\right) \\ &= u\left(u(2^p) \cdot 6 \cdot u(y)\right) = u\left(u(2^p \cdot 6) \cdot u(y)\right) = u\left(u(2^p) \cdot u(y)\right) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} u\left(m\cdot 2^{4-(k \bmod 4)}\right) &= u\left(m : 2^{k \bmod 4}\cdot 2^4\right) = u\left(u\left(m : 2^{k \bmod 4}\right)\cdot u(2^4)\right)\\ &= u\left(u\left(u(2^p)\cdot u(y)\right)\cdot 6\right) = u\left(u(2^p)\cdot 6\cdot u(y)\right)\\ &= u\left(u(2^p\cdot 6)\cdot u(y)\right) = u\left(u(2^p)\cdot u(y)\right), \end{aligned}$$

deci au loc egalitățile din enunț. □

Propoziția 6. *Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, avem*

$$r(n!) = u\Bigg(r\left(\left[\frac{n}{5}\right]!\right)\cdot u\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i\Bigg)\cdot u\left(2^{4-\left(\left[\frac{n}{5}\right] \,MOD\, 4\right)}\right)\Bigg).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i=\mathcal{M}5}} i\cdot \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i = \prod_{k=1}^{[n/5]}(5k)\cdot \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i = 5^{\left[\frac{n}{5}\right]}\cdot\left[\frac{n}{5}\right]!\cdot \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i\\ &= 10^{\left[\frac{n}{5}\right]}\cdot\left[\frac{n}{5}\right]!\cdot\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i : 2^{\left[\frac{n}{5}\right]}\Bigg), \end{aligned}$$

deci utilizând Lema 6 și Observațiile 7 și 6 rezultă că

$$r(n!) = r\Bigg(\left[\frac{n}{5}\right]!\cdot\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i : 2^{\left[\frac{n}{5}\right]}\Bigg)\Bigg) = u\Bigg(r\left(\left[\frac{n}{5}\right]!\right)\cdot u\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i : 2^{\left[\frac{n}{5}\right]}\Bigg)\Bigg).$$

Cum $\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i$ se divide cu $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ și $\left[\frac{n}{2}\right] > \left[\frac{n}{5}\right]$, aplicând Lema 7 obținem relația din enunț. □

Definiția 3. *Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, notăm*

$$s(n) = u\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i\Bigg).$$

Prin convenție, definim și $s(0) = s(1) = 6$.

Lema 8. *Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, avem*

$$s(n) = s(u(n)).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} s(n+10) &= u(\Bigg(u\Bigg(\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ i\neq \mathcal{M}5}} i\Bigg)\cdot u\Bigg(\prod_{\substack{n+1\leq i\leq n+10\\ i\neq \mathcal{M}5}} i\Bigg)\Bigg)\\ &= u\left(s(n)\cdot u(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\right) = u\left(s(n)\cdot 6\right) = s(n), \end{aligned}$$

deoarece $s(n)$ este evident o cifră pară și nedivizibilă cu 5. Cum $s(10) = s(0) = 6$ și $s(11) = s(1) = 6$, obținem că șirul $(s(n))_{n\geq 0}$ este periodic de perioadă 10 și astfel rezultă egalitatea din enunț. □

Observația 8. Conform Definiției 3 avem

$$s(0) = s(1) = s(3) = s(9) = 6,\ s(2) = 2,\ s(4) = s(5) = s(6) = s(8) = 4,\ s(7) = 8.$$

Definiția 4. *Notăm* $t(k) = u\left(2^{4-k}\right),\ k = \overline{0,3}$.

Observația 9. Conform definiției anterioare avem

$$t(0) = 6,\ t(1) = 8,\ t(2) = 4,\ t(3) = 2.$$

Teorema 1 (**relația de recurență a numerelor** $r(n!)$)**.** *Avem*

$$r(n!) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \in \{0,1\}, \\ u\left(s(u(n)) \cdot t\left(\left[\frac{n}{5}\right] \ MOD\ 4\right) \cdot r\left(\left[\frac{n}{5}\right]!\right)\right), & \text{dacă } n \geq 2. \end{cases}$$

Demonstraţie. Evident, $r(0!) = r(1!) = r(1) = 1$. Pentru $n \geq 2$ egalitatea din enunț este o consecință imediată a Propoziției 6, Definițiilor 3 și 4 și Lemei 8. □

Exemplul 7. Pentru a calcula $r(1918!)$ procedăm astfel:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1918}{5}\right] &= 383, \quad 383 \text{ MOD } 4 = 3, \\ \left[\frac{383}{5}\right] &= 76, \quad\ 76 \text{ MOD } 4 = 0, \\ \left[\frac{76}{5}\right] &= 15, \quad\ 15 \text{ MOD } 4 = 3, \\ \left[\frac{15}{5}\right] &= 3, \quad\ 3 \text{ MOD } 4 = 3, \\ \left[\frac{3}{5}\right] &= 0, \quad\ 0 \text{ MOD } 4 = 0. \end{aligned}$$

Astfel avem

$$\begin{aligned} r(1918!) &= u\left(s(u(1918)) \cdot t\left(\left[\frac{1918}{5}\right] \text{ MOD } 4\right) \cdot r\left(\left[\frac{1918}{5}\right]!\right)\right) \\ &= u\left(s(8) \cdot t(3) \cdot r(383!)\right) = u\left(4 \cdot 2 \cdot r(383!)\right), \\ r(383!) &= u\left(s(3) \cdot t(0) \cdot r(76!)\right) = u\left(6 \cdot 6 \cdot r(76!)\right), \\ r(76!) &= u\left(s(6) \cdot t(3) \cdot r(15!)\right) = u\left(4 \cdot 2 \cdot r(15!)\right), \\ r(15!) &= u\left(s(5) \cdot t(3) \cdot r(3!)\right) = u\left(4 \cdot 2 \cdot r(3!)\right), \\ r(3!) &= u\left(s(3) \cdot t(0) \cdot r(0!)\right) = u\left(6 \cdot 6 \cdot 1\right) = 6, \end{aligned}$$

deci revenind la relațiile anterioare obținem că

$$\begin{aligned} r(15!) &= u\left(4 \cdot 2 \cdot 6\right) = 8, \\ r(76!) &= u\left(4 \cdot 2 \cdot 8\right) = 4, \\ r(383!) &= u\left(6 \cdot 6 \cdot 4\right) = 4, \\ r(1918!) &= u\left(4 \cdot 2 \cdot 4\right) = 2. \end{aligned}$$

Conform rezultatelor de mai sus obținem următorul algoritm pentru determinarea lui $r(n!)$.

$s_0 \leftarrow 6$; $s_1 \leftarrow 6$; $s_2 \leftarrow 2$; $s_3 \leftarrow 6$; $s_4 \leftarrow 4$;
$s_5 \leftarrow 4$; $s_6 \leftarrow 4$; $s_7 \leftarrow 8$; $s_8 \leftarrow 4$; $s_9 \leftarrow 6$;
$t_0 \leftarrow 6$; $t_1 \leftarrow 8$; $t_2 \leftarrow 4$; $t_3 \leftarrow 2$;
UCNF(n)**:** `// calculează` $r(n!)$`, recursiv`
if $n \leq 1$ **then**
  return 1;
else
  $p \leftarrow [n/5]$; $i \leftarrow n$ MOD 10; $j \leftarrow p$ MOD 4;
  return $(s_i \cdot t_j \cdot \mathbf{UCNF}(p))$ MOD 10;

Propoziția 7. *Algoritmul UCNF are complexitatea* $\Theta(\ln n)$.

Demonstrație. Fie $T(n)$ numărul de instrucțiuni executate de algoritm. Avem $T(0) = T(1) = 1$ și $T(n) = T\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) + 5$ pentru $n \geq 2$. Fie $n \geq 2$ și $k = [\log_5 n]$, deci $k \leq \log_5 n < k + 1$ și astfel avem $5^k \leq n < 5^{k+1}$.

Cazul 1. Dacă $5^k < n < 5^{k+1}$, atunci $1 < \frac{n}{5^k} < 5$, $\frac{n}{5^{k+1}} < 1$, $\left[\frac{n}{5^{k+1}}\right] = 0$ deci adunând egalitățile

$$T(n) = T\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) + 5,\ T\left(\left[\frac{n}{5}\right]\right) = T\left(\left[\frac{n}{5^2}\right]\right) + 5,\ \ldots,\ T\left(\left[\frac{n}{5^k}\right]\right) = T\left(\left[\frac{n}{5^{k+1}}\right]\right) + 5$$

obținem $T(n) = T(0) + 5(k + 1)$, adică $T(n) = 5\,[\log_5 n] + 6$.

Cazul 2. Dacă $n = 5^k$, atunci $\frac{n}{5^{k+1}} = 1$ și analog cazului 1 obținem că $T(n) = T(1) + 5k = 5\,[\log_5 n] + 1$. □

Observația 10. O variantă iterativă a algoritmului UCNF, datorată lui Gregory P. Dresden și bazată pe reprezentarea numărului n în baza 5, precum și alte rezultate privind $r(n!)$, pot fi găsite în [4]. Menționăm că Dresden a demonstrat și faptul că numărul

$$C = 0{,}d_1d_2 \ldots d_n \ldots,\ \text{unde } d_n = r(n!),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este și irațional (deci șirul numerelor $r(n!)$ nu este periodic), și transcendent [2, 3].

Bibliografie

[1] C. Bălcău, *Optimalitatea algoritmului de căutare binară*, MATINF 1 (2018), nr. 1, 39–51.

[2] G. Dresden, *Two Irrational Numbers From the Last Nonzero Digits of* $n!$ *and* n^n, Math. Mag. 74 (2001), no. 4, 316–320.

[3] G. Dresden, *Three Transcendental Numbers From the Last Non-Zero Digits of* n^n, F_n *and* $n!$, Math. Mag. 81 (2008), no. 2, 96–105.

[4] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `https://oeis.org/A008904`

Desenarea figurilor pentru problemele de geometrie cu ajutorul aplicației GeoGebra

Laurențiu Deaconu [1]

În acest articol este ilustrat modul de utilizare a aplicației GeoGebra pentru realizarea figurilor specifice problemelor de geometrie plană. Prezentarea de față nu-și propune să fie un ghid de utilizare pentru aplicația GeoGebra, ci doar să-i inițieze pe cei interesați de realizarea unor figuri riguroase și sugestive pentru problemele de geometrie.

Am ales două probleme foarte cunoscute, intrate deja în "folclorul" matematic: prima se referă la cercul și dreapta lui Euler, iar a doua ilustrează locul geometric al centrului de greutate al unui triunghi în situația în care un vârf se "plimbă" pe cercul circumscris triunghiului.

Instalarea aplicației

Aplicațiile GeoGebra pot fi descărcate gratuit de la adresa `www.geogebra.org/download`. În această prezentare a fost utilizat modulul **Geometry**. Instalarea este foarte simplă: se lansează în execuție aplicația descărcată.

La instalare, pe ecran apare pictograma aplicației și apoi fereastra de lucru (fig. 1).

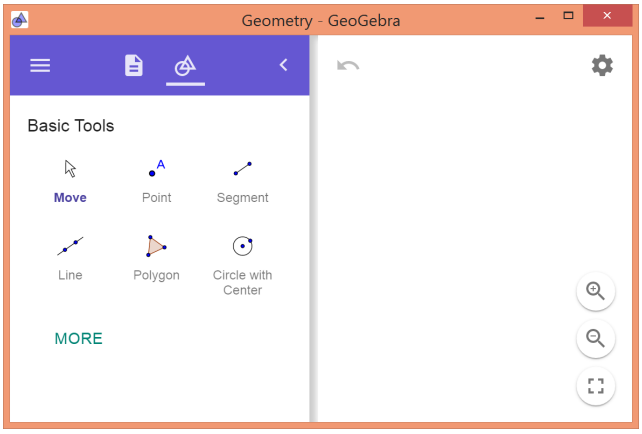


Figura 1.

De la pictograma "≡" situată în colțul din stânga-sus se poate activa meniul principal (fig. 2) care se aseamănă cu majoritatea meniurilor aplicațiilor. Aici, în partea de jos, se pot activa setările (fig. 3) de unde se poate selecta limba română.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, laurentiu.deaconu@upit.ro

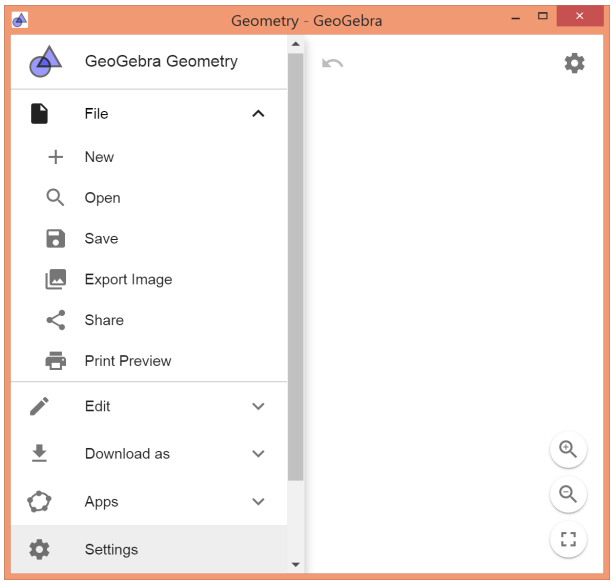


Figura 2.

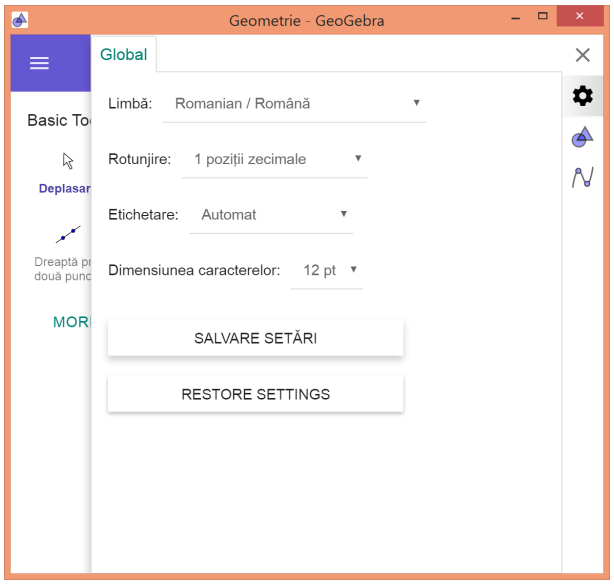


Figura 3.

După apăsarea butonului "SALVARE SETĂRI" și închiderea panelului "Global", majoritatea etichetelor și meniurilor sunt scrise în limba română. Pentru obținerea pictogramelor pentru toate funcțiile aplicației se apasă pe cuvântul "MORE", o dată în partea de sus a ferestrei din stânga și apoi, după deplasare în partea de jos, încă o dată. Pictogramele și etichetele lor sunt suficient de sugestive și nu necesită explicații suplimentare. Oricum, după selectarea unei pictograme, în partea de jos a ferestrei din stânga apare o fereastră mică cu precizări referitoare la utilizarea funcției (fig. 4).

Prima problemă

Ne propunem să desenăm figura geometrică pentru următoarea problemă:

Fie ABC un triunghi oarecare.

i) Notăm cu D, E și F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB, cu M, N și P picioarele înălțimilor construite din A, B respectiv C, cu H ortocentrul triunghiului ABC și cu A', B', C' mijloacele segmentelor HA, HB respectiv HC.

Atunci punctele $A', B', C', D, E, F, M, N$ și P sunt conciclice. (Cercul lui Euler)

ii) Dacă, pentru $\triangle ABC$, notăm cu O centrul cercului circumscris, cu H ortocentrul și cu G centrul de greutate, atunci punctele H, G și O sunt coliniare și $HG = 2GO$. (Dreapta lui Euler)

Înainte de a începe desenarea figurii facem câteva precizări: **selectarea** unui element din ecran presupune poziționarea cursorului mouse-ului pe respectivul element și apăsarea butonului stâng al mouse-ului; revenirea la situația anterioară (în cazul unei erori) se poate face apăsând pe "↶" care se găsește în colțul din stânga-sus al ferestrei din dreapta; în principiu, elementele desenului sunt "mobile" și poziția lor poate fi modificată ușor (selectăm "Deplasare" din secțiunea "Basic Tools", poziționăm cursorul mouse-ului pe obiect, ținem apăsat butonul stâng al mouse-ului și deplasăm obiectul în poziția dorită).

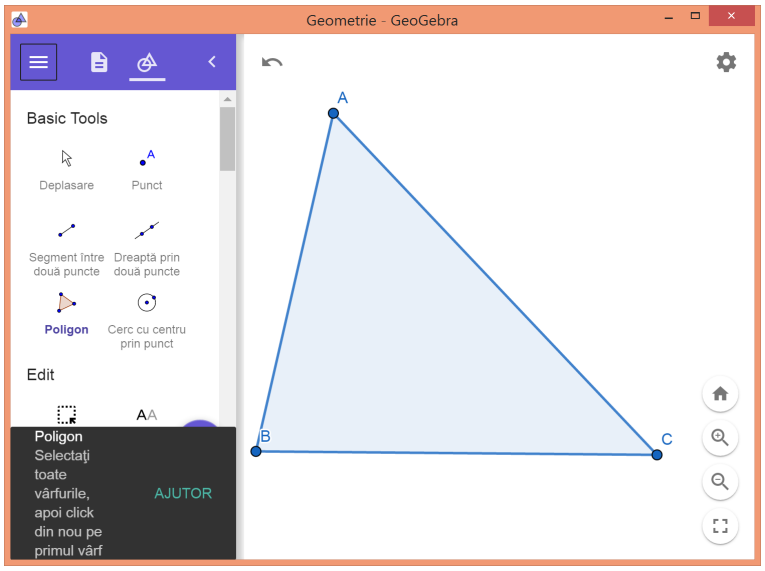


Figura 4.

Pentru a începe desenarea figurii selectăm (dacă nu este deja selectat) meniul "Instrumente" situat în bara de sus a ferestrei din stânga (pictograma cu un triunghi și un cerc, care este subliniată în fig. 4).
Pentru a desena triunghiul, selectăm "Poligon", poziționăm (în fereastra din dreapta) punctele A, B și C, apoi "închidem" triunghiul selectând din nou punctul A (fig. 4).

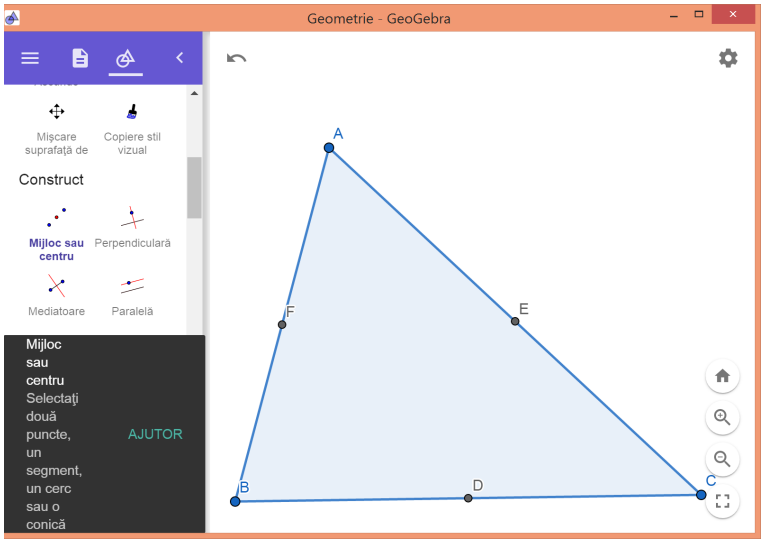


Figura 5.

Marcăm mijloacele laturilor BC, CA și AB: alegem "Mijloc sau centru" și apoi selectăm succesiv laturile BC, CA, AB (fig. 5).

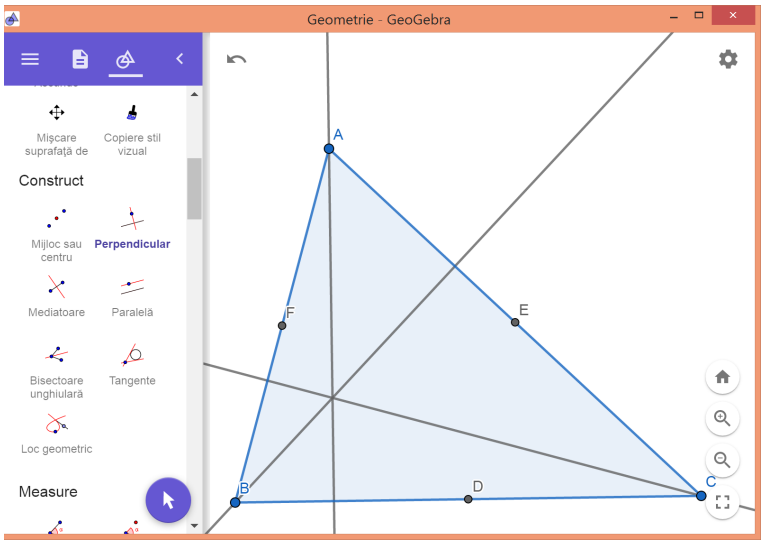


Figura 6.

Construim înălțimile. Mai întâi desenăm dreptele care trec prin vârfuri și sunt perpendiculare pe laturile opuse. Alegem "Perpendicular" și apoi selectăm succesiv vârful și latura opusă: A, BC, apoi B, CA și în final C și AB (fig. 6).

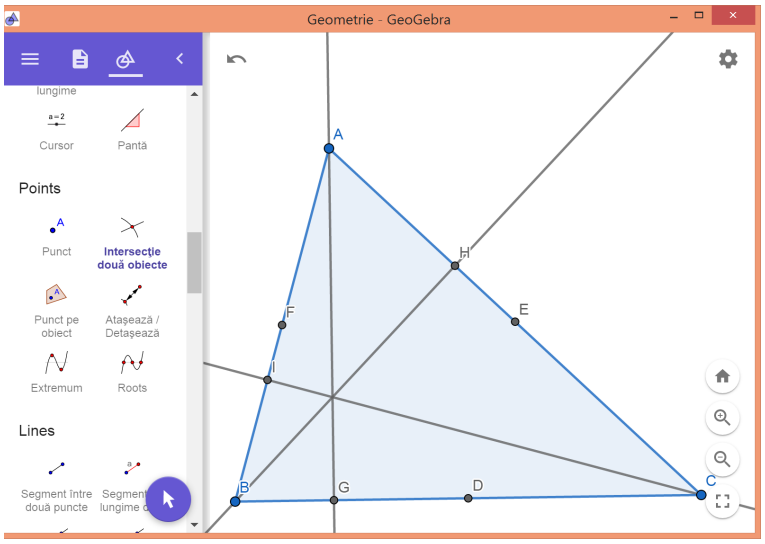


Figura 7.

Identificăm picioarele înălțimilor: alegem "Intersecție două obiecte" și apoi selectăm fiecare latură urmată de perpendiculara corespunzătoare: BC, perpendiculara din A, CA, perpendiculara din B, AB și apoi perpendiculara din C (fig. 7).
Obținem punctele G, H și I.

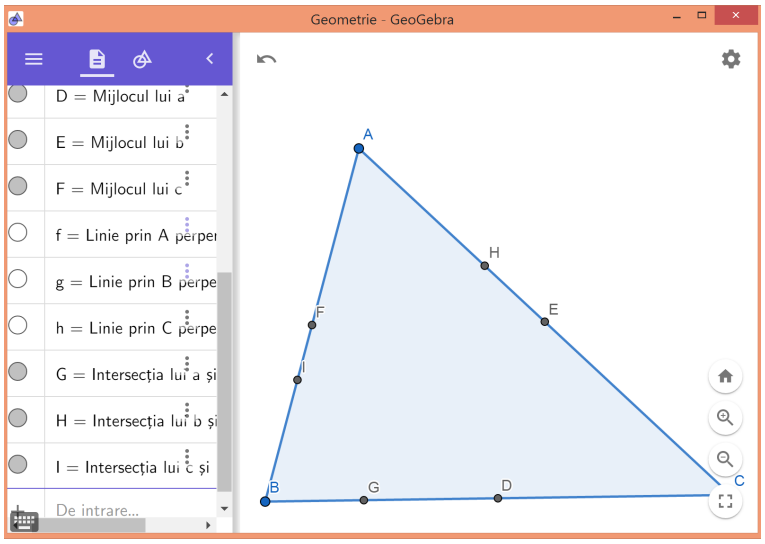


Figura 8.

Ascundem perpendicularele construite anterior. Alegem meniul "Steps" (pictograma care simbolizează o pagină, situată în stânga pictogramei meniului "Instrumente" din bara de sus a ferestrei din stânga), apoi selectăm succesiv cercurile din partea stângă a obiectelor "f", "g" și "h" (fig. 8).

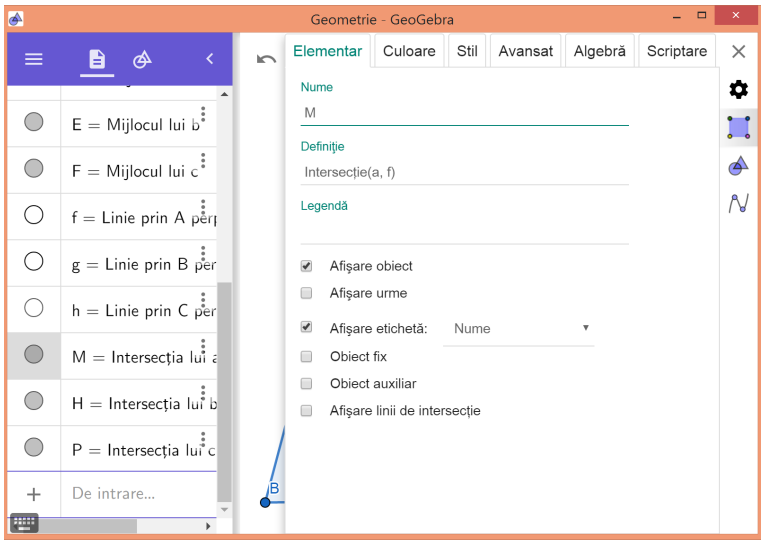


Figura 9.

Modificăm denumirea punctelor G, H și I. Selectăm pictograma ":" din partea dreaptă a obiectului "G" și din fereastra care apare alegem "Setări". Selectăm zona text situată sub "Nume" în fereastra care apare în partea dreaptă și modificăm litera "G" în "M" (fig. 9).
Procedăm analog pentru obiectele "H" și "I" și modificăm denumirea punctelor în N și P.

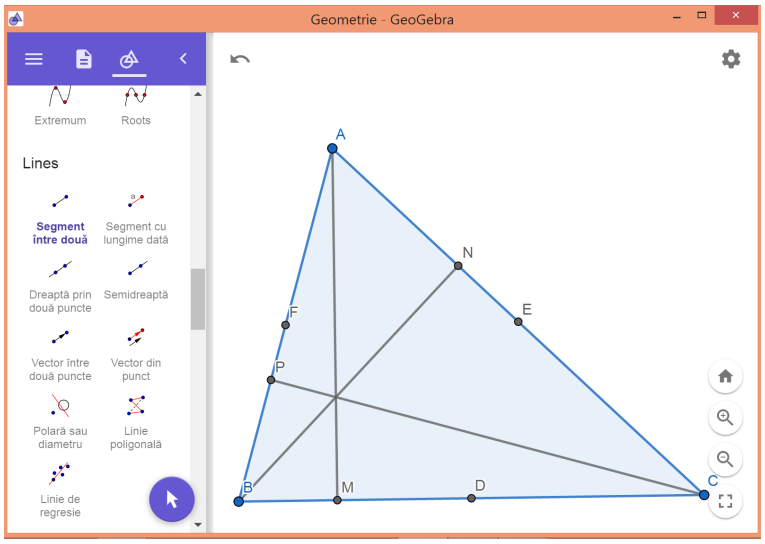


Figura 10.

Pentru a construi mijloacele segmentelor HA, HB și HC desenăm mai întâi înălțimile și identificăm ortocentrul.
Alegem "Segment între două puncte" și selectăm succesiv punctele A, M, apoi B, N și în final C, P (fig. 10).
Alegem apoi "Intersecție două obiecte" și selectăm două înălțimi. Obținem punctul notat G (fig. 11).

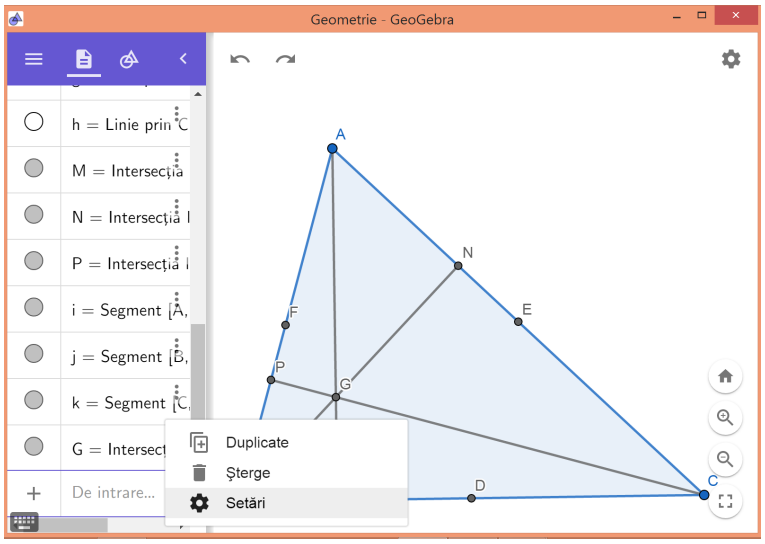


Figura 11.

Alegem meniul "Steps" și modificăm notarea ortocentrului din G în H (fig. 9, 11).

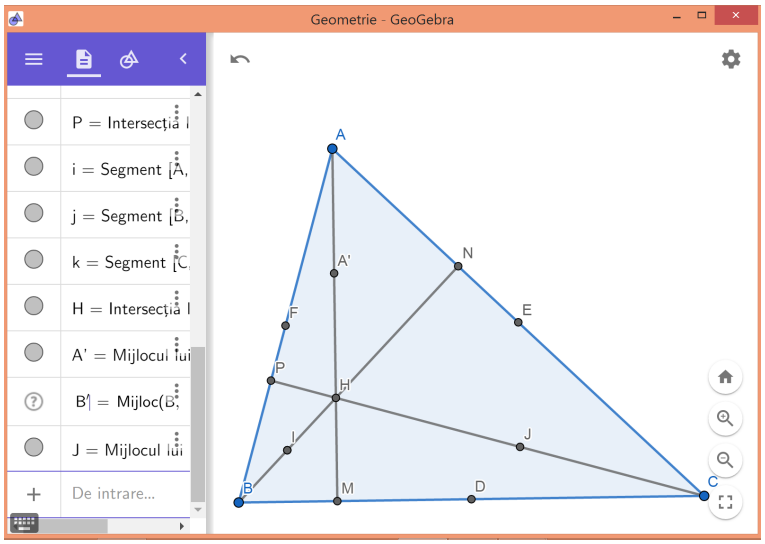


Figura 12.

Identificăm mijloacele segmentelor HA, HB și HC. Alegem, din meniul "Instrumente", "Mijloc sau centru" și apoi selectăm succesiv punctele A, H, B, H, C și H.
În continuare modificăm notarea mijloacelor obținute în A', B' și respectiv C' (fig. 12).

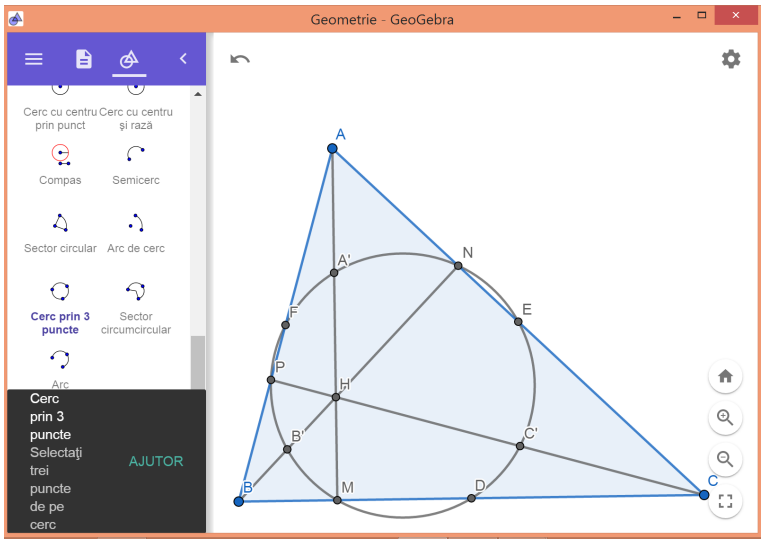


Figura 13.

În final, alegem "Cerc prin 3 puncte" și apoi selectăm succesiv 3 din cele 9 puncte, de exemplu D, N și B'. Cercul obținut trece prin toate cele 9 puncte. El se numește *Cercul lui Euler* (al triunghiului ABC) (fig. 13).

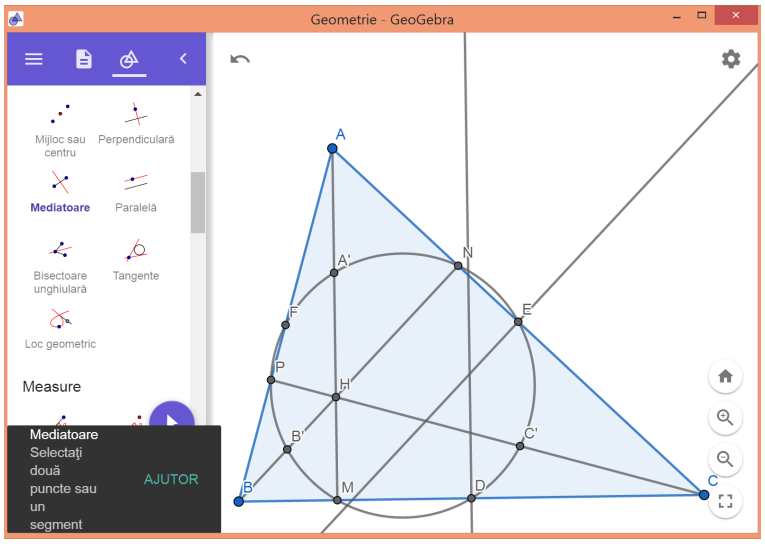


Figura 14.

Pentru punctul ii) al problemei construim două mediatoare pentru a obține centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Alegem "Mediatoare" și selectăm, de exemplu, laturile BC și CA (fig. 14).

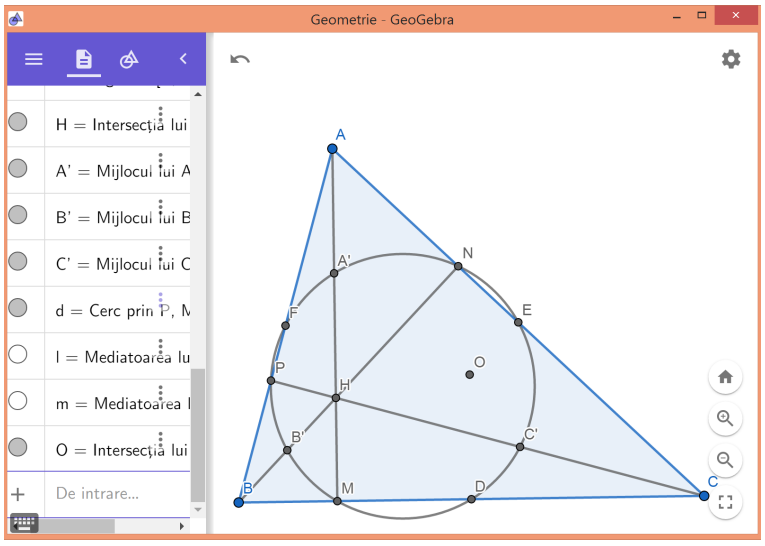


Figura 15.

Identificăm centrul cercului circumscris ca intersecție a mediatoarelor (alegem "Intersecție două obiecte" și apoi selectăm cele două mediatoare), ascundem cele două mediatoare și, dacă este cazul, modificăm notarea centrului în O (fig. 15).

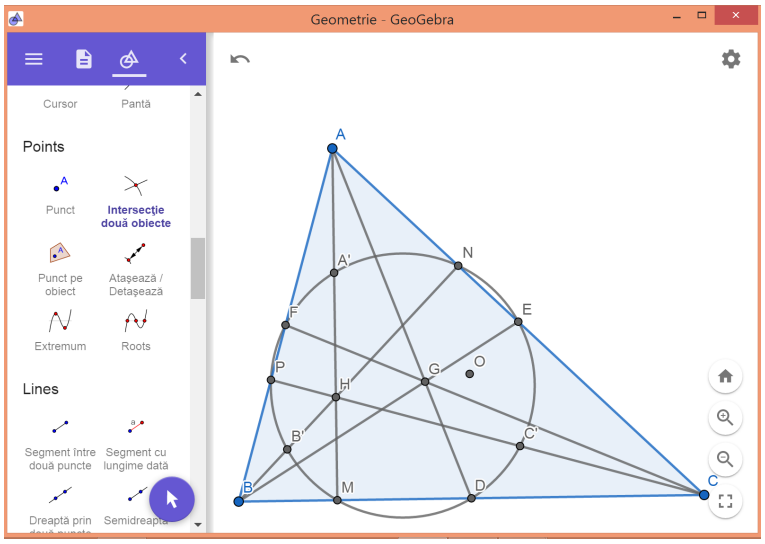


Figura 16.

Construim cele 3 mediane (alegem "Segment între două puncte" și selectăm succesiv punctele A, D, B, E, C, F) și notăm centrul de greutate al triunghiului ABC (alegem "Intersecție două obiecte" și selectăm două mediane, de exemplu AD și BE). Notăm punctul obținut cu G (fig. 16).

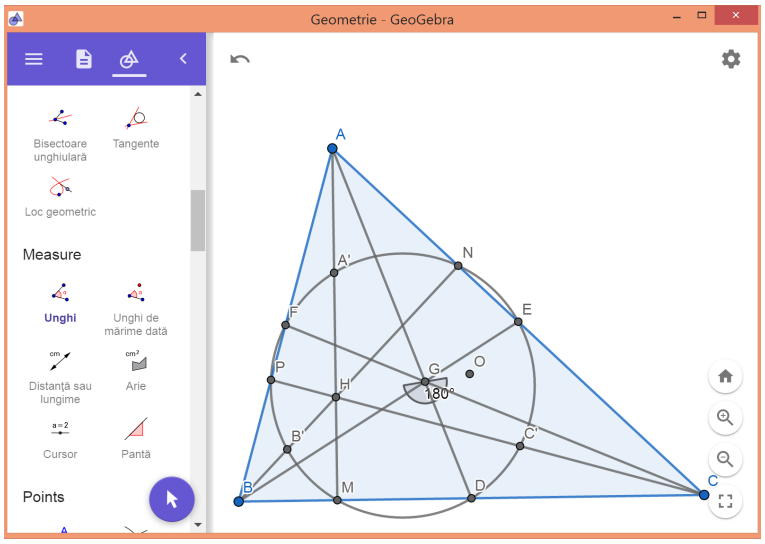


Figura 17.

Pentru a sugera că punctele H, G și O sunt coliniare măsurăm unghiul $\widehat{HGO}$. Alegem "Unghi" și selectăm punctele H, G și O, în această ordine. Observăm că unghiul are măsura de 180° (fig. 17). Dreapta pe care se află cele trei puncte se numește *Dreapta lui Euler* (a triunghiului ABC).

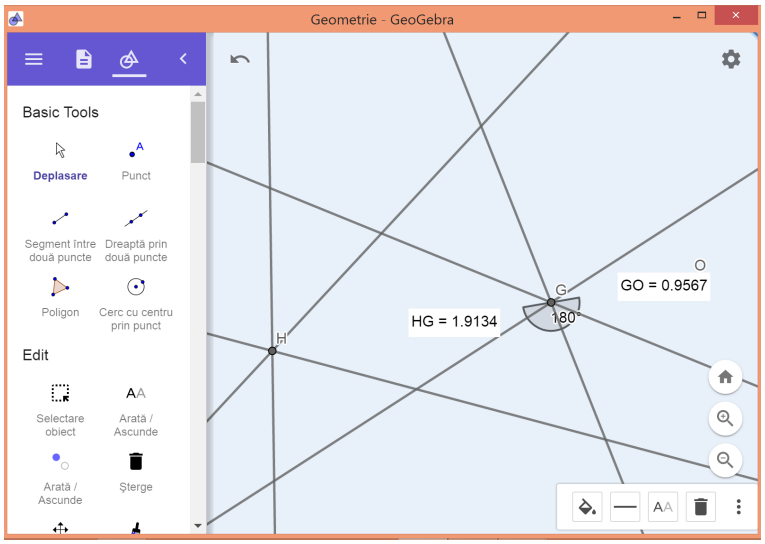


Figura 18.

Folosim lupa cu "+" situată în colțul din dreapta-jos pentru a mări imaginea și alegem "Mișcare suprafață de desen" sau "Deplasare" pentru deplasarea convenabilă a figurii (poziționăm cursorul într-o zonă liberă, ținem apăsat butonul stâng al mouse-ului și deplasăm mouse-ul pentru poziționarea corectă a imaginii). Alegem apoi "Distanță sau lungime" și selectăm punctele H, G și G, O. Obținem lungimile segmentelor HG și respectiv GO. Observăm că $HG = 2GO$ (fig, 18).

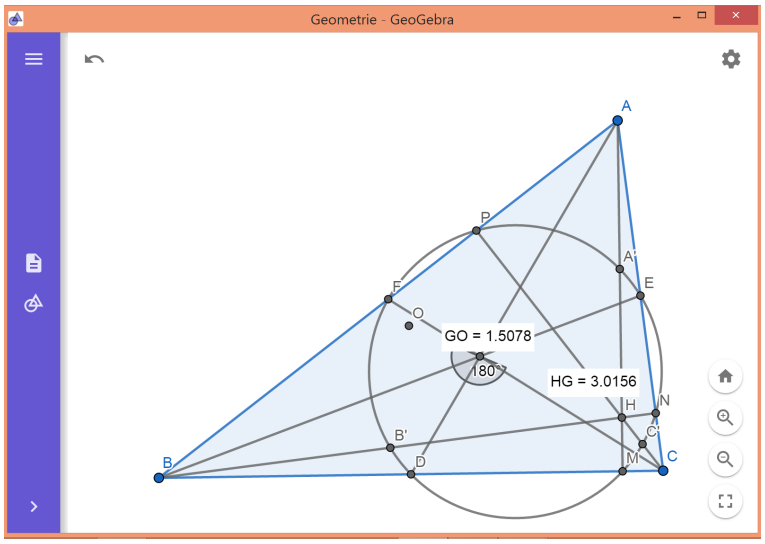


Figura 19.

Pentru a reveni la dimensiunea inițială a figurii folosim lupa cu "−". Putem verifica afirmațiile din concluzia problemei modificând forma și dimensiunea triunghiului. Alegem "Deplasare" și deplasăm vârfurile triunghiului în poziția dorită. Figura se reface automat. Pentru a vizualiza figura într-o fereastră mai mare, selectăm pictograma "<" din bara de sus a ferestrei din stânga (fig. 18) și obținem fereastra din fig. 19.

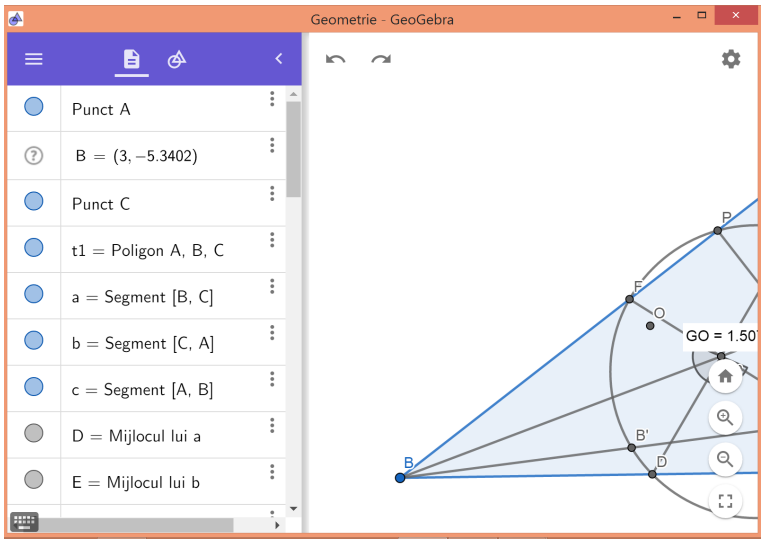


Figura 20.

Pentru a analiza un caz particular, putem modifica coordonatele vârfurilor triunghiului. Alegem meniul "Steps", selectăm "Punct B" și modificăm coordonatele, de exemplu în $(3, -5)$ (fig. 20).
Analog, putem modifica punctul $C(13, -5)$.

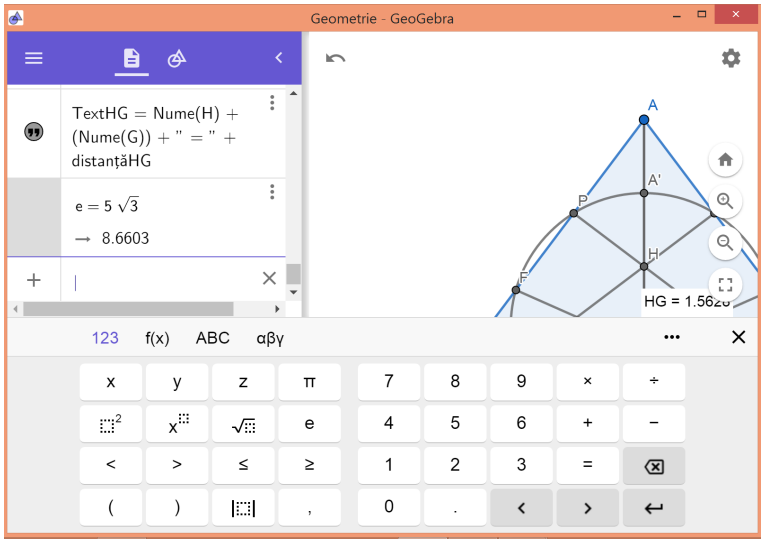


Figura 21.

Activăm calculatorul aplicației (selectăm pictograma care sugerează un calculator de buzunar, situată în colțul din stânga-jos al ferestrei aplicației), calculăm lungimea înălțimii triunghiului echilateral care are lungimea laturii egală cu 10 (fig. 21) și determinăm coordonatele punctului $A(8, 3.6603)$ pentru care triunghiul ABC este echilateral.

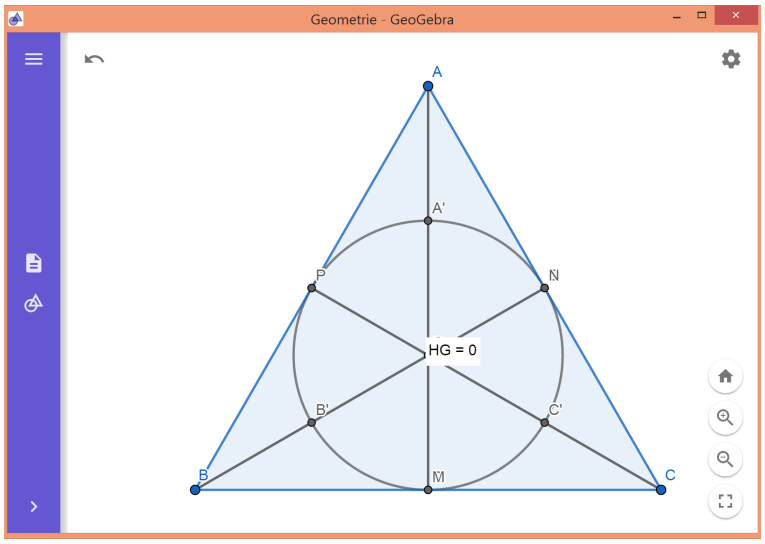


Figura 22.

Modificăm coordonatele punctului A și obținem cazul particular al triunghiului echilateral (fig. 22).

A doua problemă

Ne propunem să ilustrăm utilizarea aplicației GeoGebra pentru identificarea locurilor geometrice. Pentru acest tip de probleme există posibilitatea "fixării" unor elemente, a păstrării "urmelor" (pozițiilor) unui punct și a animației punctelor mobile.

Considerăm un triunghi ABC cu vârfurile B, C fixe și vârful A mobil pe cercul circumscris triunghiului. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABC dacă A parcurge cercul circumscris triunghiului.

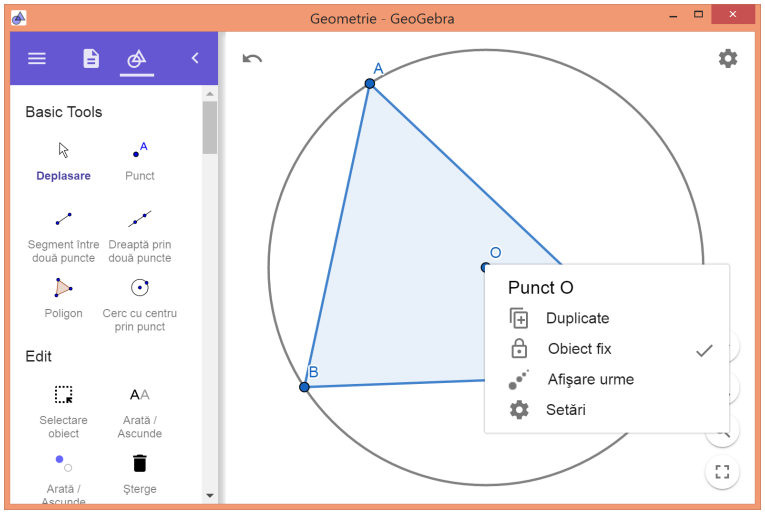


Figura 23.

Desenăm un cerc de centru O care trece printr-un punct P (alegem "Cerc cu centru prin punct" și modificăm notațiile). Desenăm triunghiul ABC cu vârfurile pe cercul de centru O (alegem "Poligon" și poziționăm cursorul mouse-ului pe cerc astfel încât acesta să se modifice din "săgeată" în "mânuță". "Fixăm" punctele B, C, O și P (poziționăm cursorul mouse-ului pe punct, apăsăm butonul dreapta al mouse-ului și, din fereastra care apare, selectăm "Obiect fix") (fig. 23).

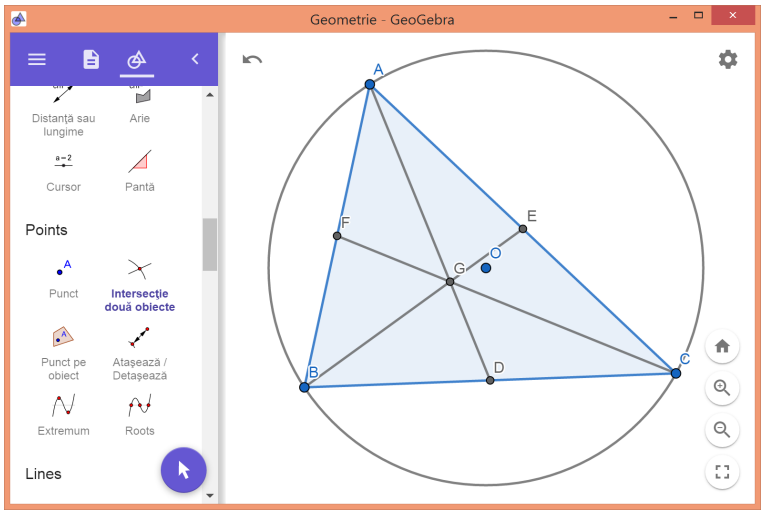


Figura 24.

Ascundem punctul P, trasăm mijloacele D, E, F ale laturilor BC, CA și AB (cu "Mijloc sau centru"), desenăm medianele (cu "Segment între două puncte") și identificăm centrul de greutate G al triunghiului ABC (cu "Intersecție două obiecte") (fig. 24).

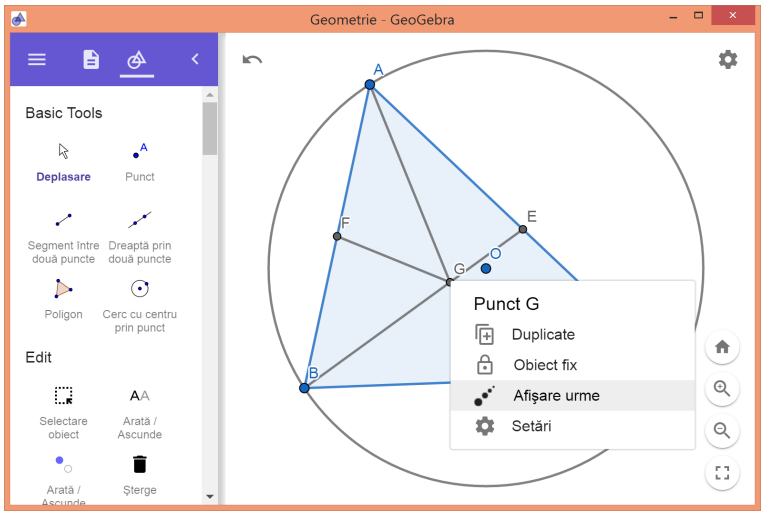


Figura 25.

Poziționăm cursorul mouse-ului pe punctul G, apăsăm butonul dreapta al mouse-ului și, din fereastra care apare, selectăm "Afișare urme" (fig. 25).

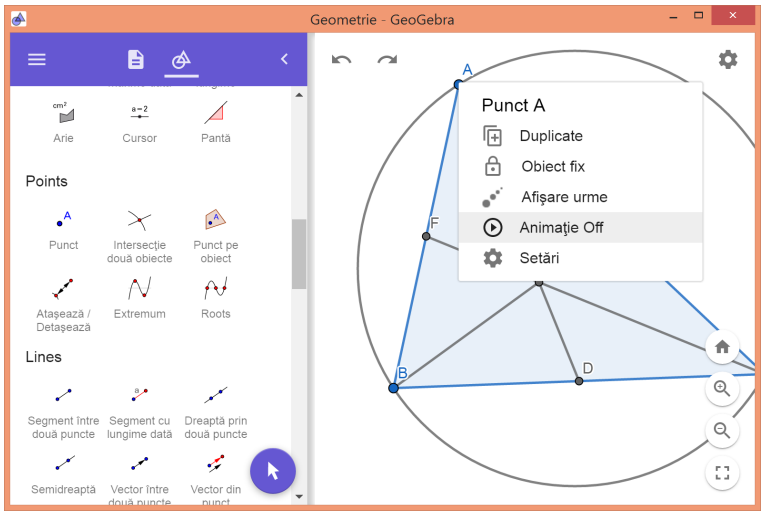


Figura 26.

Poziționăm cursorul mouse-ului pe punctul G, apăsăm butonul dreapta al mouse-ului și, din fereastra care apare, selectăm "Animație Off" (fig. 26).

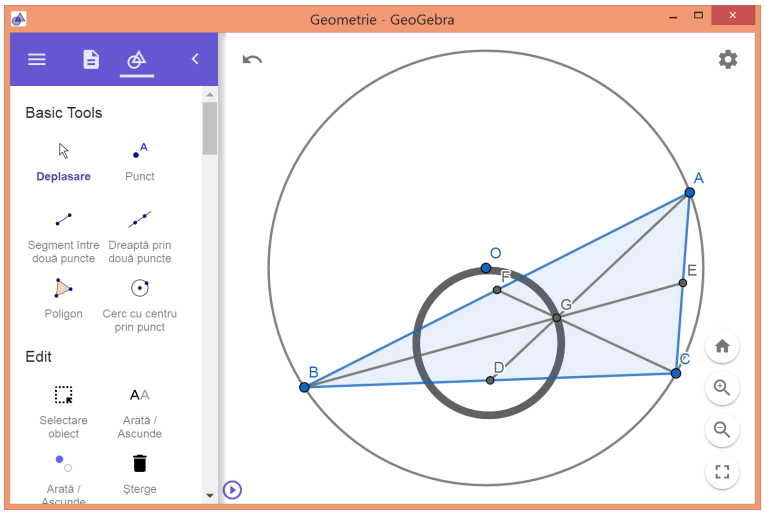


Figura 27.

În colțul din dreapta-jos al ferestrei din dreapta apare un cerculeț cu simbolul "play" sau "pause", în funcție de context, iar punctul A se deplasează pe cercul de centru O. Punctul G "desenează" un cerc (fig. 27). Acesta este locul geometric al centrului de greutate.

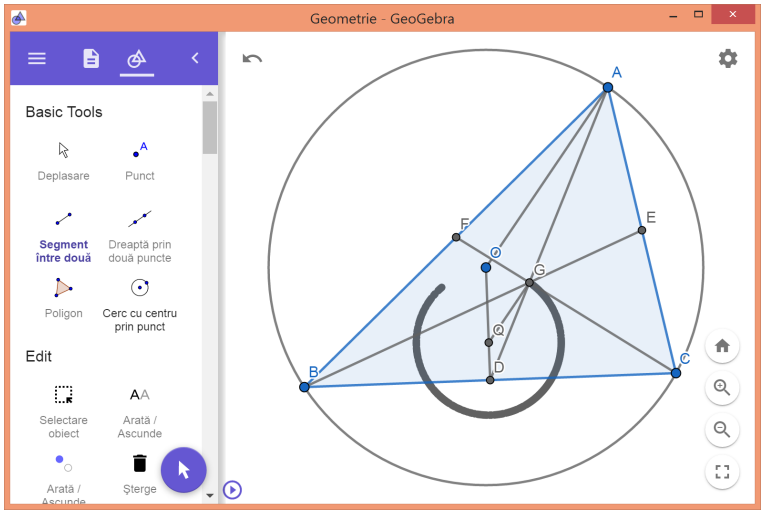


Figura 28.

Pentru a identifica centrul și raza cercului descris de punctul G, desenăm segmentele AO și OD, ducem paralela la AO prin G (cu "Paralelă") și notăm cu Q punctul de intersecție cu OD. Ascundem paralela și desenăm segmentul GQ. Selectăm cerculețul cu simbolul "play" și putem observa că punctul G trasează un cerc de centru Q și rază QG.

Se poate verifica ușor că punctul Q se află pe OD la o treime de D și două treimi de O, iar raza QG este o treime din raza cercului circumscris triunghiului ABC.

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Programarea roboților LEGO folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Introducere

Mediul de programare **Mindstorms Education EV3** a roboților LEGO este ușor de utilizat pentru că are blocurile grupate în raport cu funcționalitatea lor. O prezentare a acestui mediu este realizată în [1], [2] și [3]. Structura alternativă este reprezentată folosind un bloc și se găsește în grupul de blocuri *Flow Control*. Acest bloc se numește *Switch* și este asemănător cu *blocul de decizie* de la scheme logice sau instrucțiunea *if* din orice limbaj de programare. În prima parte a blocului se precizează modul de obținere a valorii logice: de la un senzor sau de la un bloc ce are ca rezultat o valoare logică, iar în partea de sus (pentru *true*), respectiv jos (pentru *false*) este locul unde se introduc blocurile ce se vor executa. În Figura 1 este prezentat blocul de decizie switch.

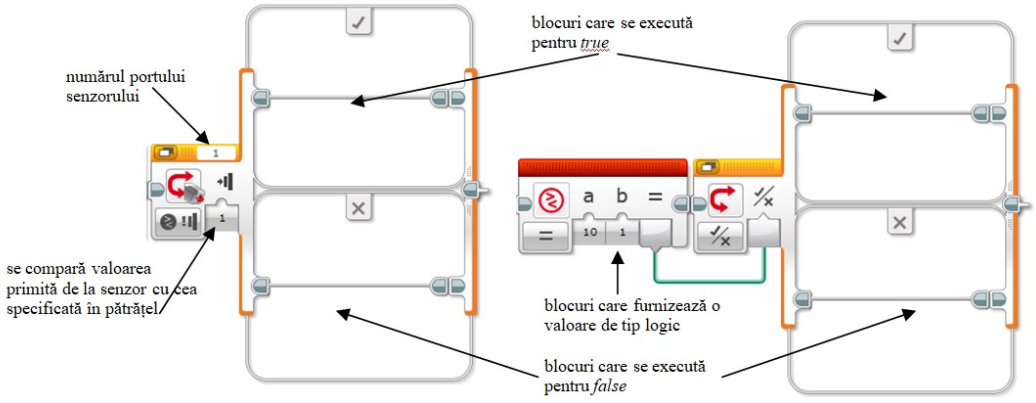

blocuri care se execută pentru true
numărul portului senzorului
se compară valoarea primită de la senzor cu cea specificată în pătrățel
blocuri care furnizează o valoare de tip logic
blocuri care se execută pentru false

Fig. 1: Blocul de decizie (*Switch*)

Mai multe informații legate de acest bloc găsiți în lucrările [3] și [4].

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

Aplicații

Aplicația 1 (Problema sunetelor condiționate). *Generați aleator un număr din mulțimea* $\{1, 2, \ldots, 20\}$. *Dacă valoarea generată este strict mai mare ca 10, atunci robotul trebuie să redea un sunet de câine, altfel un sunet de pisică.*

Soluție: Pentru a rezolva această problemă asamblăm după *Start* următoarele blocuri: *Random* – pentru numere din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 20\}$, *Variable* – configurat cu numele k, pentru a prelua valoarea generată, *Compare* – pentru a compara valoarea din k cu 10 și apoi *Switch* pentru a reda unul din sunetele cerute (cu un bloc *Sound*). □

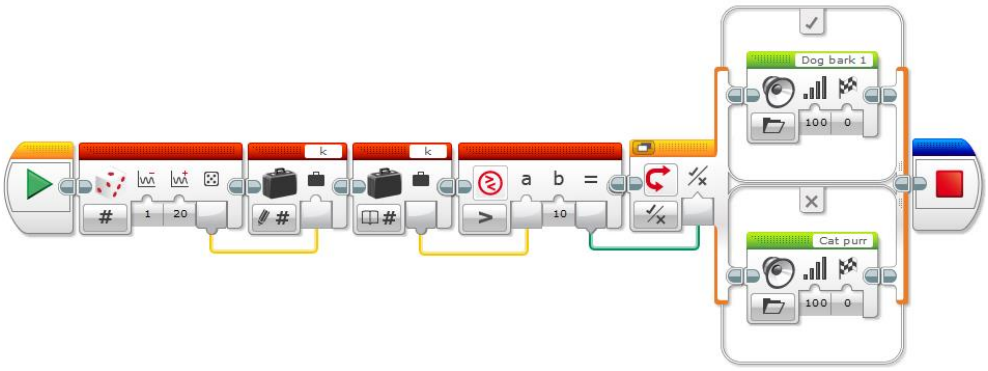


Fig. 2: Programul pentru problema sunetelor condiționate

Aplicația 2 (Problema deplasării condiționate). *Pentru un robot ce dispune de un senzor de culoare conectat la portul numărul 2 scrieți un program care să-l deplaseze cu 3 rotații, dacă senzorul detectează culoarea albastru, respectiv cu o rotație în caz contrar.*

Soluție: Pentru rezolvarea problemei avem nevoie de două blocuri: *Switch* și *Move Steering*. Pentru blocul *Switch* trebuie să selectăm senzorul *Colour Sensor*, iar pentru *Switch* să selectăm la prima ramură culoarea albastră și să introducem blocul motor *Move Steering* configurat cu 3 rotații. Pentru a doua ramură selectăm orice culoare diferită de albastru și se bifăm butonul asociat. Programul se încheie cu blocul pentru oprirea motorului și *Stop Program*. □

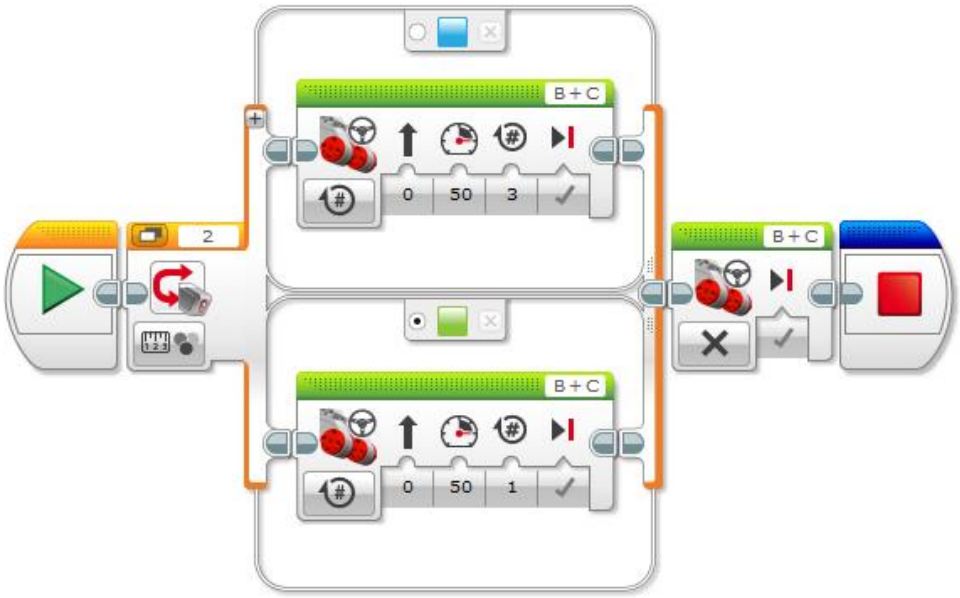


Fig. 3: Programul pentru problema deplasării condiționate

Observația 1. Condiția de acces din blocul *Switch* în una din cele două ramuri poate conține expresii logice ce folosesc valori preluate de la senzori.

Probleme propuse

1. Se consideră programul de mai jos. Cum se deplasează robotul, dacă se folosește acest program? Explicați care este rolul fiecărui bloc.

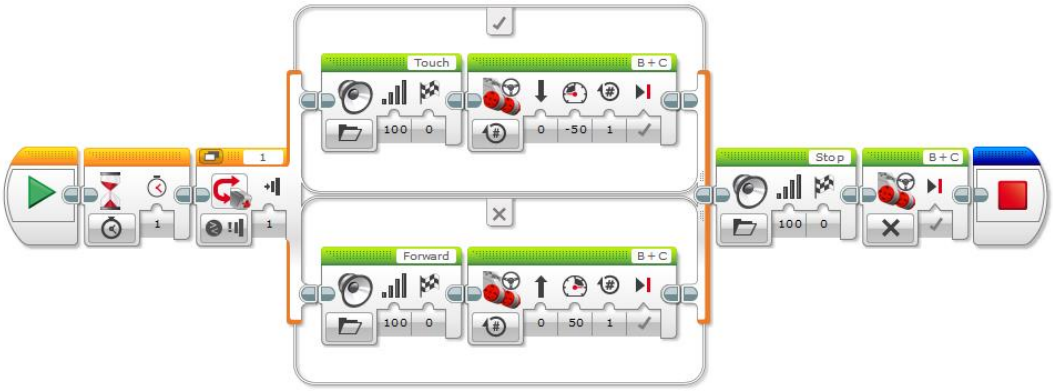


Fig. 4: Program Minsdtorms EV3

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un program folosind mediul interactiv de programare *Mindstorm Education EV3*.

2. Generați aleator un număr din mulțimea $\{1, 2, ..., 100\}$ și apoi afișați pe ecranul cărămizii textul *par* sau *impar* în funcție de paritatea numărului generat.
3. Modificați programul de la *Problema deplasării condiționate*, asfel încât deplasarea să se realizeze cu spatele folosind senzorul infraroșu. Dacă obiectul este mai aproape de 5 pct robotul va merge trei rotații înapoi, altfel o rotație înapoi.
4. Generați aleator două numere din mulțimea $\{1, 2, ..., 100\}$ și apoi afișați pe ecranul cărămizii textul *numere pare* sau *nu sunt ambele pare* în funcție de paritatea ambelor numere.
5. Generația aleator un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. În funcție de valoarea generată robotul se va întoarce la dreapta cu 90° pentru număr par, respectiv la stânga cu 90° în caz contrar.
6. Afișați pe ecranul cărămizii textul *rosu*, dacă senzorul de culoare detectează culoarea roșie, respectiv textul *alta culoare*, în caz contrar.

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3*, MATINF, nr. 1, 2018.

[2] *Minsdtorms EV3 – Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[3] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Mindstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[4] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Elena Țițescu [1]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $1,25 + 25/10$ este ....
2. Dacă media aritmetică a numerelor $x, 7$ și 2 este 8, atunci x este ....
3. Cel mai mare divizor propriu par al numărului 50 este ....
4. Dacă perimetrul triunghiului ABC este 96 cm, iar punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, atunci perimetrul triunghiului MNP este ... cm.
5. Un tetraedru regulat are latura de 5 dm. Suma tuturor lungimilor muchiilor tetraedrului este egală cu ... cm.
6. Notele obținute de elevii unei clase la teza de matematică sunt cele din tabelul următor:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	2	4	3	4	3	5	3

Media clasei la teza de matematică este egală cu ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați un tetraedru regulat notat $MATE$.
2. Calculați media geometrică a numerelor naturale de o cifră care sunt pătratele unor numere naturale și diferite de acestea.
3. Un elev pleacă într-o excursie de două zile cu suma de 250 lei. În prima zi cheltuiește 60% din sumă, iar a doua zi jumătate din rest. Cu ce sumă s-a întors elevul din excursie?
4. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 10$.
   a) Calculați $f(-1) + 10$.
   b) Reprezentați grafic funcția într-un sistem de coordonate xOy.
5. Se consideră expresia

$$E(x) = \left(\frac{6x+36}{x^2-36} + \frac{7}{x+8}\right) : \frac{13x+6}{2x^2+4x-96},$$

unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{6}{13}, \pm 6, 8\right\}$. Arătați că expresia este constantă.

SUBIECTUL al III-lea

1. O bucată de lemn are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ în care aria triunghiului ACD' este egală cu $400\sqrt{3}$ cm^2.

[1] Profesor, Școala Gimnazială „Naum Râmniceanu”, Corbi, amalia_elena19@yahoo.com

a) Arătați că latura cubului este de $20\sqrt{2}$ cm.
b) Aflați volumul cubului.
c) Din această bucată de lemn se cioplește o piesă cu formă de piramidă $DACD'$. Aflați volumul piesei piramidale.

2. Dintr-o bucată de carton dreptunghiulară cu lungimea de 160 cm și lățimea de 60 cm se decupează discuri având lungimile razelor egale cu un același număr natural nenul de centimetri și cu centrele aliniate pe orizontală și pe verticală.
a) Care este numărul maxim de discuri cu raza de 8 cm care se pot decupa?
b) Pentru a obține 600 de discuri, ce lungime maximă poate avea raza unui disc?
c) Dacă diametrul unui disc este de 4 cm și se decupează discuri din tot materialul, aflați cât la sută din bucata de carton reprezintă materialul pierdut prin decupare (se consideră aproximarea $\pi \approx 3,14$).

Testul 2

Alexandra Dana Badea [2]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $(2^8 : 2^5 + 2) : 5$ este ....
2. Valoarea numărului natural a pentru care $\dfrac{a}{1,(7)} = \dfrac{9}{4}$ este ....
3. Aria paralelogramului $MATE$ cunoscând $MA = 6\sqrt{2}$ cm, $AT = 4$ dm și $m(\sphericalangle A) = 45°$ este ... cm^2.
4. În tetraedrul regulat $ABCD$ măsura unghiului dintre dreptele AD și BC este de ... °.
5. Rezultatul calculului $(\sin 60° + \cos 45°)^2$ este egal cu ....
6. În tabelul următor sunt reprezentate temperaturile înregistrate pe parcursul a 10 zile din luna februarie.

Număr de zile	2	3	2	1	2
Temperatura °C	8	5	3	6	4

Temperatura medie înregistrată pe durata celor 10 zile este egală cu ... ° C.

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați corpul geometric obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ΔABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ în jurul catetei AB.
2. Fie numerele reale $a = 2^{1998} + 3^{2019} - 1^{2019}$, $b = 1 - (2^{3^2})^{222}$ și $c = 3^{2019}$.
a) Arătați că numărul a este divizibil cu 5.
b) Calculați media aritmetică a numerelor a, b și c.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
a) Găsiți numerele a și b astfel încât graficul funcției f să fie dreapta AB, unde $A(-2; -3)$ și $B(-1; 1)$.
b) Pentru $a = 4$ și $b = 5$ calculați tangenta unghiului format de graficul funcției f cu axa Oy.
4. Simplificați raportul: $\dfrac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 2x - 3}$.

[2] Profesor, Școala Gimnazială Albești de Argeș, alleexa85@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB < CD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$ și $AB = 4$ cm. Fie $E \in (CD)$ astfel încât $\mathcal{P}_{\Delta BEC} = 24$ cm, iar laturile triunghiului BEC (BE, EC și BC) sunt direct proportionale cu numerele 24, 18 și 30.
   a) Stabiliți natura triunghiului ΔBEC.
   b) Calculați perimetrul și aria trapezului $ABCD$.
   c) Arătați că lungimea segmentului AC este mai mică decât 13 cm.
2. În tetraedrul regulat $STAR$ se cunoaște $ST = 12$ cm.
   a) Arătați că înălțimea tetraedrului este egală cu $4\sqrt{6}$ cm.
   b) Aflați aria totală și volumul tetraedrului.
   c) Demonstrați că unghiul format de dreptele ST și AR este de 90°.

Testul 3

Ecaterina Iancu [3]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $5^{-1} + 2^{-1} + 0,25$ este ....
2. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{732x}$ divizibil cu 4 este ....
3. Dacă $A \cap B = \{6, 8\}$ și $A \setminus B = \{2, 3, 5\}$ atunci cardinalul mulțimii A este ....
4. Știind că perimetrul unui pătrat se exprimă printr-un număr care reprezintă 50% din aria aceluiași pătrat, atunci latura pătratului este ....
5. Într-un con circular drept cu raza de 8 cm, măsura unghiului dintre o generatoare și diametrul bazei este de 60°. Atunci aria secțiunii axiale a conului este ....
6. Conform diagramei de mai jos, numărul jucăriilor fabricate este egal cu ....

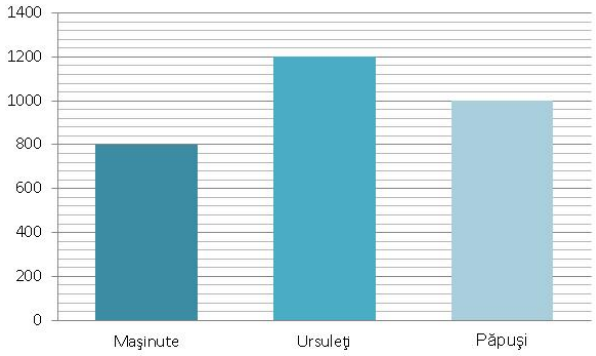


Figura 1

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați, pe foaia de examen, o sferă având raza egală cu 3 cm.
2. Arătați că media aritmetică a numerelor $a = \dfrac{1}{2-\sqrt{5}} - \left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{-1}$ și $b = 4 \cdot |\sqrt{5}-2| + \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ este egală cu -8.
3. După două majorări succesive, prima de 25%, iar cea dea doua de 20%, prețul unei case aflate la vânzare a ajuns la 145000 lei. Care a fost prețul de pornire al vânzării acestei case?

[3] Profesor, Şcoala Gimnazială Beleţi–Negreşti, catyiancu19@gmail.com

4. Fie $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.
   a) Trasați graficul funcției într-un sistem de axe de coordonate xOy.
   b) Aflați măsura unghiului format de graficul funcției f și dreapta ce reprezintă graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4$.
5. Fie expresia
$$E(x) = \left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{2x^2-1}{2x+1}\right) : \frac{x^2-x-1}{x+4} \cdot (2x+1),$$
unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n, $E(n)$ este o fracție supraunitară.

SUBIECTUL al III-lea

1. În figura de mai jos este reprezentată schița unui teren format dintr-un pătrat $ABCD$ cu $I \in (AB)$ astfel încât $IB = \frac{1}{4}AB$, un dreptunghi $IHGB$ care are lungimea BG egală cu 15 m, iar lățimea egală cu 20% din lungime și un romb $FCDE$ cu $m(\sphericalangle FCD) = 60°$.
   a) Aflați lungimea gardului ce înconjoară acest teren.
   b) Comparați suprafața rombului cu cea a pătratului.
   c) Fie M mijlocul laturii FC și MN perpendiculara din M pe CD, unde $N \in (CD)$. Să se calculeze aria triunghiului BNM.

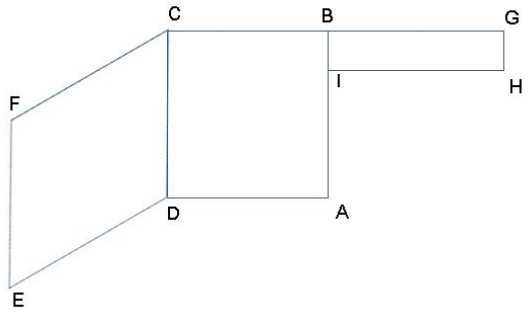


Figura 2

2. O piesă de fier sub formă de cilindru circular drept cu raza de 6 cm și generatoarea egală cu 8 cm se transformă prin topire într-o bilă sferică.
   a) Să se afle raza bilei sferice.
   b) Să se afle masa bilei sferice știind că densitatea fierului este de 7,8 g/cm^3, utilizând aproximările $\pi \approx 3,14$ și $\sqrt{2} \approx 1,41$.
   c) Cât la sută din aria totală a piesei sub formă de cilindru reprezintă aria bilei sferice?

Testul 4

Ioana Florea [4]

SUBIECTUL I

1. Valorile reale ale lui a pentru care $| 2a + 1 | = 5$ sunt ... și ....
2. Calculând $a^2 + 2ab + b^2$ pentru care $a = 5 + \sqrt{3}$ și $b = 2 - \sqrt{3}$ se obține ....

[4] Profesor, Școala Gimnazială „Gabriel Marinescu”, Tigveni, ioanaflorea60@yahoo.com

3. Fie $A = \left\{\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{5}}{4},\ \sqrt{169},\ 0,\ -\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}},\ -4\sqrt{10}\right\}$. Produsul numerelor iraționale care aparțin mulțimii A este egal cu ....
4. Triunghiul care are laturile de lungimi egale cu a, b, c pentru care $\mid a-10 \mid + \mid b-6 \mid + \mid c-8 \mid = 0$ este un triunghi ....
5. O doime dintr-un număr adunată cu o optime din același număr este 160. Atunci numărul este ....
6. În timpul programului „Școala altfel", elevii unei școli au participat la următoarele activități:

Activitatea	Filme educative	Excursie	Întâlnire cu invitați
Număr elevi	120	90	40

Procentul elevilor care au mers în excursie din numărul total de elevi este de ....

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați și notați un con circular drept cu secțiunea axială un triunghi echilateral.
2. Aflați x din proporția $\frac{x}{a} = \frac{0,75}{1331^{672}}$ unde

$$a = 2 \cdot 11^{2018} - 12 \cdot 11^{2017} - 10 \cdot 11^{2016}.$$

3. Un tir a parcurs în trei zile 1475 km. În a doua zi a parcurs dublul distanței din prima zi și încă 60 km, iar în a treia zi 25% din distanța parcursă în a doua zi. Câți km a parcurs tirul în fiecare zi?
4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + a - 2b$. Determinați numerele reale a și b, știind că graficul funcției f trece prin punctele $A(3, -3)$ și $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.
5. Fie expresia

$$E(x) = \frac{\frac{1}{x^2-1} + \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) : \left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

a) Arătați că $x^2 + 2x + 2 \neq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $E(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Figura de mai jos reprezintă schița unui teren agricol format din zona dreptunghiulară pe care se cultivă cartofi și două zone în formă de semicerc. Se știe că $AB = 30$ dam și lungimea semicercului este egală cu 20π dam.

Figura 1

a) Terenul este împrejmuit cu gard protector. Aflați câți metri are acesta și rotunjiți la un număr întreg.

b) Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{teren}}{3+\pi}$ este pătrat perfect, unde $\mathcal{A}_{teren}$ reprezintă aria terenului .

c) Să se afle ce sumă se obține din vânzarea întregii producții de cartofi, știind că se obțin 250 kg la hectar și 1 kg de cartofi costă 1,5 lei.

2. Într-un vas în formă de cub se pune apă până la mijlocul înălțimii (figura de mai jos). Un fir de floarea soarelui cu o tulpină de 70 cm va fi așezat în vas sprijinit în punctele C' și E, unde E este mijlocul laturii $[AB]$.

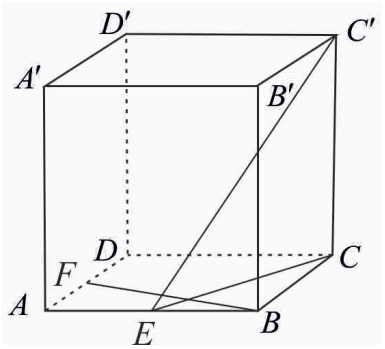


Figura 2

a) Știind că $\frac{6}{7}$ din tulpina florii se află în interiorul vasului, aflați câți litri de apă sunt în vas.

b) Dacă F este mijlocul muchiei $[AD]$, să se demonstreze că $C'E \perp BF$.

c) Calculați distanța de la vârful D la planul (ACD').

Testul 5

Maria Balcă [5]

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)^{-1}$ este egal cu ....
2. Dacă $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ și $a \neq -10$, atunci valoarea raportului $\frac{a+10}{b+6}$ este ....
3. Scriind sub formă de interval mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} | (\sqrt{3}-2)x + \sqrt{3} \leq 2\}$, se obține $A = \ldots$.
4. Aria trapezului isoscel $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$ este egală cu $\ldots$ cm^2.
5. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre dreptele $D'C$ și BC' este de $\ldots°$.
6. Rezultatele obținute la o evaluare scrisă de elevii clasei a VIII-a sunt sintetizate în următorul tabel:

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	3	5	6	5	6	5

Conform tabelului, media clasei este egală cu ....

[5] Profesor, Școala Gimnazială „Ion Pillat”, Pitești, balca.maria@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea

1. Desenați o piramidă patrulateră regulată $SANIE$, de vârf S și bază $ANIE$.
2. Arătați că numărul $n = (\sqrt{10-\sqrt{99}}+\sqrt{10+\sqrt{99}})^2$ este număr natural.
3. Într-o școală, în trei clase A, B și C sunt 96 de elevi. Dacă s-ar muta din clasa A trei elevi în clasa B și doi elevi în clasa C, atunci cele trei clase ar avea același număr de elevi. Câți elevi sunt în fiecare clasă?
4. Fie $a,\ b,\ c$ trei numere naturale invers proporționale cu 0,(3), 0,1(6) și 0,25.
   a) Arătați că a^2+c^2 este un număr pătrat perfect.
   b) Aflați media aritmetică a numerelor, știind că $b^2-(a^2+c^2)=99$.
5. Se consideră expresia $E(x)=(x^2+x+4)^2-(x^2+x)^2-2(2x+1)^2$, unde $x\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $E(x)=14$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. În Figura 1 este reprezentată „Steaua lui David" formată prin suprapunerea a două triunghiuri echilaterale, ABC și DEF, congruente. Aria unui triunghi este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2, iar punctele de intersecție ale triunghiurilor împart laturile acestora în segmente congruente, unde $M,N\in(AB)$, $P,Q\in(BC)$ și $R,S\in AC$.

   a) Arătați că $MNPQRS$ este hexagon regulat.
   b) Calculați aria porțiunii hașurate.
   c) Aflați cât la sută reprezintă aria porțiunii hașurate din suprafața triunghiului ABC.

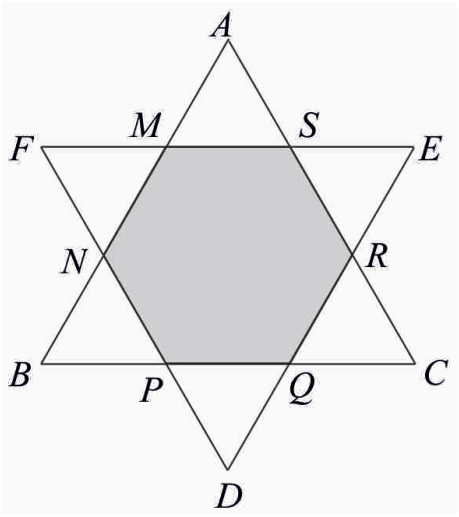


Figura 1

2. În Figura 2 este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$, cu $AB=5\sqrt{3}$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv BC.

   a) Calculați suma ariilor fețelor tetraedrului $ABCD$.
   b) Demonstrați că latura MN este paralelă cu planul (ACD).
   c) Arătați că distanța de la punctul A la planul (BCD) este mai mică decât $3\sqrt{6}$ cm.

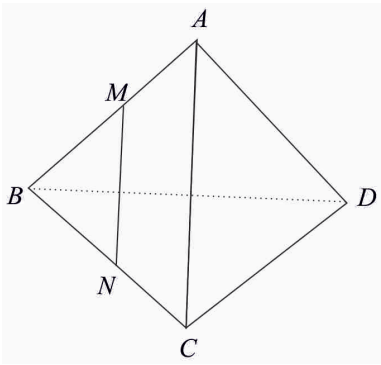


Figura 2

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $z = \dfrac{a+2i}{2+ai} \in \mathbb{R}$.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel $\dfrac{x_1^3-4}{x_1} + \dfrac{x_2^3-4}{x_2} = -1$ unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-(m-1)x+3=0$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2-x}=2$.
4. Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii A care conțin elementele 1 și 2.
5. Fie punctele $A(0,3)$, $B(0,2)$ și $C(-1,4)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta determinată de B și C.
6. Știind că $a,b \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos a = -\dfrac{3}{5}$ și $\sin b = \dfrac{3}{5}$, să se calculeze $\cos(a+b)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se dă matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & 2a \\ -\dfrac{9a}{2} & 1-3a \end{pmatrix}$.
   a) Să se arate că $A(a)$ este inversabilă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și să se determine inversa sa.
   b) Să se arate că $A(a)\cdot A(b) = A(a+b)$, pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$.
   c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^{2018}(a) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + X - 4$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
   a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f este divizibil cu $g = X-1$.
   b) Pentru $m=-2$, să se calculeze $|x_1|+|x_2|+|x_3|$.
   c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2^2 \\ x_2 & x_3^2 & x_1 \end{vmatrix} = 16m - 25.$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$.
   a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$.
   b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.
   c) Să se determine ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$.
   a) Să se arate că orice primitivă F a lui f este convexă pe $(-\infty,0]$.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 (x^2+x+1)f(x)dx$.
   c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z=(1+2i)^2-(1-2i)^2$.

2. Determinați valorile parametrului real m astfel încât punctul $A(2,3)$ să aparțină graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=m^2x-5$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}-5^3=650$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale impare de trei cifre, acesta să fie cub perfect.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(-1,3)$ și $C(a,1)$. Determinați numărul real a astfel încât punctele $A,\ B,\ C$ să fie coliniare.

6. Fie triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=6$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 1\\ -4 & x-2\end{pmatrix}$.
   a) Calculați $\det(A(2))$.
   b) Arătați că $(A(x))^2=2xA(x)-x^2\cdot I_2$.
   c) Determinați valorile reale ale lui x astfel încât $\det(A(x))=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+3x+3y+6$.
   a) Arătați că $x*y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x, y.
   b) Rezolvați ecuația $x*x*x=x$.
   c) Calculați valoarea expresiei $(-2019)*(-2018)*\cdots*2018*2019$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$.
   a) Calculați $f'(1)$.
   b) Determinați asimptotele funcției.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$.

a) Calculați $\int\limits_0^1 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu [3]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $a=\sqrt[3]{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ este întreg.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-3x+2m, m\in\mathbb{R}^\star$. Aflați numărul real m, astfel încât mulțimea valorilor funcției f să fie intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând aleator un număr din mulțimea $A=\{10,11,\ldots,100\}$, acesta să aibă exact 9 divizori naturali.
5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=8$ și $AD=3$. Pe latura DC se iau punctele E și F astfel încât $DE=EF=FC$. Aflați lungimea vectorului $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}$.
6. Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x=1$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\x&0&0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det\left[A(x)+A^t(x)\right]=\det A(x)+\det A^t(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde B^t este transpusa matricei B.

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)=I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c) Rezolvați în $M_3(\mathbb{R})$ ecuația $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(2019)\cdot X\cdot A(1)=2019!\cdot A(-1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2-2a$, unde a este un număr real nenul și x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului f.

a) Calculați numărul real a, știind că restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X-1$ este egal cu 5.

b) Determinați numerele reale a, pentru care are loc egalitatea

$$\left(2-3x_1+x_1^2\right)\left(2-3x_2+x_2^2\right)\left(2-3x_3+x_3^2\right)=12.$$

c) Aflați numărul real a, astfel încât are loc egalitatea $\left(\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}\right)^2+\frac{1}{x_1^2x_2^2}+\frac{1}{x_1^2x_3^2}+\frac{1}{x_2^2x_3^2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}$.

[3] Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+\ln(x^2+1), & \text{dacă } x\leq 0 \\ (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}+a, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$.
   a) Aflați numărul real a, astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=0$.
   b) Arătați că funcția f nu admite asimptotă spre $-\infty$.
   c) Arătați că $10e^e<e^5+e^3$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x-e, & \text{dacă } x\leq 1 \\ x\ln x, & \text{dacă } x>1 \end{cases}$.
   a) Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
   b) Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.
   c) Arătați că $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{f(x)}dx\leq -\frac{2}{1+4e}$.

Testul 4

Maria-Crina Diaconu [4]

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $i^2+i^4+i^6+i^8+...+i^{80}$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$. Să se determine ecuația axei de simetrie a graficului funcției date.
3. Să se rezolve ecuația $\frac{(n-7)!}{(n-9)!}=72, n\in\mathbb{N}, n\geq 9$.
4. Determinați câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(1,3)$ și $Q(2,6)$. Determinați coordonatele punctului R știind că P este simetricul lui R față de Q.
6. Verificați egalitatea $\frac{1}{\cos^2 15^\circ}+\frac{1}{\sin^2 15^\circ}=16$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Considerăm matricea $A(a)=\begin{pmatrix} \sqrt{5}+a & -1 \\ 5 & -\sqrt{5}-a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.
   a) Calculați $A^2(-1)$.
   b) Determinați valoarea parametrului real a pentru care matricea $I_2+5A(a)$ este inversa matricei $I_2-5A(a)$.
   c) Pentru $a=0$, aflați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A(a)-xI_2)=9$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$$x*y=4(x+y-3)-xy.$$
   a) Arătați că $x*y=4-(x-4)(y-4)$, pentru orice numere reale x și y.
   b) Studiați existența elementului neutru față de legea „$*$”.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^x*\left(\frac{1}{4}\right)^x=4$.

[4] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3x}{2x+4}$.
   a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+\frac{4}{5}}{x-3}$.
   b) Să se afle ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
   c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=2$ situat pe graficul funcției.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^8+x$.
   a) Să se calculeze $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$.
   b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^9}\int\limits_0^x f(t)\,dt$.
   c) Determinați numărul real $a, a>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ are aria egală cu $\dfrac{11}{18}$.

Testul 5

Ileana Florentina Țîrcă [5]

SUBIECTUL I

1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_5=12$.
2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-5m+6)\cdot x-2$ să fie strict descrescătoare.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+5}=x+1$.
4. Determinați numărul submulțimilor cu cinci elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8,10,12\}$.
5. Să se determine cosinusul unghiului dintre vectorii $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.
6. Să se determine raza cercului circumscris $\triangle ABC$ cu $AB=8$, $AC=11$ și $BC=13$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\-1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze $A\cdot B$.
   b) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa sa.
   c) Să se determine suma elementelor matricei $X=I_2+B+B^2+\ldots+B^{2018}$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=5xy+6(x+y)+6$.
   a) Demonstrați că $x*y=5\left(x+\dfrac{6}{5}\right)\left(y+\dfrac{6}{5}\right)-\dfrac{6}{5}$.
   b) Determinați elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$”.
   c) Calculați $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 2018 ori } x}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.
   a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

[5] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Cantacuzino”, Pitești, ileana_tirca@yahoo.com

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
c) Determinați intervalele de monotonie ale lui f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{9}{2}$.

b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+\ln x+2018$ este o primitivă a funcției f.
c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Daniel Valentin Fugulin [1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați al zecelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 3$, $a_5 = 18$. **(5p)**

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$. Să se determine parametrul real m, astfel încât vârful parabolei graficului funcției f să fie pe axa Ox. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$. **(5p)**

4. Determinați numărul de submulțimi care conțin doar numere impare ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **(5p)**

5. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, unde $A(1, 3)$, $B(-3, 5)$. **(5p)**

6. În triunghiul ABC se cunosc $BC = 4$, $\cos A = 3/5$. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră A, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $AB - BA = O_2$. **(5p)**

b) Demonstrați că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $XA = AX$, atunci există numerele reale a, b astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. **(5p)**

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $X^2 + X = A$. **(5p)**

2. Fie legea de compoziție definită pe $\mathbb{R}$ prin $x * y = xy - x - y + 2$.

a) Arătați că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$. **(5p)**

b) Aflați perechile de numere întregi (a, b) astfel încât $a * b = 4$. **(5p)**

c) Știind că legea "$*$" este asociativă, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x * \ldots * x = 1025$, compunerea făcându-se de 9 ori. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

[1] Liceul teoretic „Ion Mihalache", Topoloveni, danfugulin@yahoo.com

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. **(5p)**

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f. **(5p)**

c) Determinați numărul soluțiilor ecuației $f(x)=a$, unde $a>0$. **(5p)**

2. Se definește șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ astfel $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+2}dx$.

a) Să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se demonstreze relația $I_{n+2}+I_{n+1}+2I_n=\dfrac{1}{n+1}$, $n\geq 1$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. **(5p)**

TESTUL 2

Mihai Burdușa [2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătați că numărul

$$x=\log_{2019}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_{2019}\left(1-\frac{1}{3}\right)+...+\log_{2019}\left(1-\frac{1}{2019}\right)$$

este întreg. **(5p)**

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3,\ g(x)=x^2-3x+3$. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}+1=x$. **(5p)**

4. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n=\sqrt{4n+1}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un termen dintre primii 100 de termeni ai șirului, acesta să fie număr rațional. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(3,4)$. Determinați ecuația dreptei care include înălțimea din A a triunghiului OAB. **(5p)**

6. Aflați valorile $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ pentru care $\sqrt{\sin x+2\cos x}=\sin x+\cos x$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & a+1\\ 1 & a & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ ax+y+(a+1)z=6a\\ x+ay+az=a+2\end{cases},\ a\in\mathbb{R}.$$

[2] Profesor, Școala Gimnazială „Mihai Eminescu” Pitești, Școala Gimnazială nr. 1 Costești, mihai@burdusa.ro

a) Calculați $\det(A(2019))$. **(5p)**

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat. **(5p)**

c) Pentru $a = 1$, găsiți soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care are loc egalitatea $\frac{x_0 - 1}{2019} = (3y_0 + z_0)^2$. **(5p)**

2. Fie $x \circ y = x^{\ln y} + y^{\ln x} - 1$, $x, y \in (0, \infty)$.

a) Arătați că $x \circ y = 2x^{\ln y} - 1$, $\forall x, y \in (0, \infty)$. **(5p)**

b) Rezolvați ecuația $x \circ x = 1$. **(5p)**

c) Arătați că „$\circ$" nu este lege de compoziție pe mulțimea $(0, \infty)$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x-1}{e^{nx}}$.

a) Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală pentru graficul funcției f_{2019}. **(5p)**

b) Să se studieze monotonia funcției f_1. **(5p)**

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f_n(x) - \dfrac{1}{e^{2x}}}{x-2} \right)$. **(5p)**

2. Fie $a \in (0, \infty)\backslash\{1\}$ și $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x \log_a x$

a) Arătați că $\int_1^2 \dfrac{f_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x = 2 - \dfrac{1}{\ln 2}$. **(5p)**

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f_e, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = e$. **(5p)**

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{a\to 0 \\ a>0}} \int_a^1 \dfrac{f_a(x)}{x}\, \mathrm{d}x$. **(5p)**

TESTUL 3

Maria-Crina Diaconu [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați valorile reale ale lui m pentru care numărul $z = 3i^3 - mi^2 + (2 - m)i + 6$ este real. **(5p)**

2. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - 5x - 5 = 0$. Formați ecuația de gradul al doilea în y cu rădăcinile $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$. **(5p)**

[3] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{9^x - 2 \cdot 3^x + 1} = 3^x - 1$. **(5p)**

4. Aflați probabilitatea ca aruncând două zaruri produsul numerelor de puncte obținute să fie multiplu de 4. **(5p)**

5. Calculați distanța de la $A(3, -1)$ la dreapta de ecuaţie $y = 8$. **(5p)**

6. Știind că $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\beta = -\frac{7}{25}$, calculați $\cos(\alpha + \beta)$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul (S): $\begin{cases} x + y + az = -1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului. **(5p)**

b) Să se determine numărul real a pentru care sistemul nu este compatibil determinat. **(5p)**

c) Să se afle $a \in \mathbb{R}$, pentru care soluția unică a sistemului este o progresie aritmetică de rație $r = 3$. **(5p)**

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se definește legea de compoziție dată de $x * y = xy + ax + by + 2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrii reali a și b astfel încât legea de compoziție să fie comutativă și asociativă. **(5p)**

b) Pentru $a = b = -1$ să se determine elementul neutru și elementele simetrizabile din $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$". **(5p)**

c) Pentru $a = b = 2$ să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 2019 ori } x} = 3^{2019} - 2$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2 - mx}{x^2 - nx + 4}$, D fiind domeniul maximal de definiție al lui f.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in D$. **(5p)**

b) Să se determine valorile parametrilor reali m și n astfel încât $x = -1$ și $x = 1$ să fie puncte de extrem relativ și să se precizeze natura acestor puncte. **(5p)**

c) Să se determine valorile parametrilor reali m și n astfel încât dreapta de ecuație $y = 2$ să fie asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$. **(5p)**

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+ex}dx$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+ex}dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_0. **(5p)**

b) Să se verifice că $eI_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. **(5p)**

TESTUL 4

Mihai Florea Dumitrescu [4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se arate că numărul $a=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ este întreg. **(5p)**

2. Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta $y=x-1$ și parabola $y=x^2-mx+m$ nu au puncte comune. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}=3$. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă 5 divizori naturali. **(5p)**

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=3$, $AD=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Pe latura BC se iau punctele M, N și P astfel încât $BM=MN=NP=PC$. Aflați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}$. **(5p)**

6. Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&x\\x&0&x\\x&x&0\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\det A(\sqrt[3]{2})$. **(5p)**

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left[A(\sqrt[3]{t})+I_3\right]=0$. **(5p)**

c) Arătați că $[A(1)]^{n+2}=[A(1)]^{n+1}+2\,[A(1)]^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2-aX+2$, unde a este un număr real nenul.

a) Calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X+1$. **(5p)**

b) Pentru $a=1$, calculați suma $|x_1|+|x_2|+|x_3|$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f. **(5p)**

c) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}&=&\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}&=&-\dfrac{3}{4}\\[2mm]\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}&=&\dfrac{17}{4}\end{cases}.$$

(5p)

[4] Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^{x^2+x+1}}$.

a) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. **(5p)**

b) Aflați coordonatele punctului de intersecție dintre tangentele la graficul funcției f în punctele de abscisă $x=-1$, respectiv $x=0$. **(5p)**

c) Arătați că $f(x)\leq\dfrac{1}{x^2+x+1}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\displaystyle\int_0^x t\sin ntdt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $f_2'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{24}$. **(5p)**

b) Calculați $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln(n+1)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}f_n(x)\right)\right]$. **(5p)**

c) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{6}$. **(5p)**

TESTUL 5

Antonio Nuică [5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine $\left(\overline{1+i}\right)^{2019}$. **(5p)**

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\ln(x^2-3x+3)=0$. **(5p)**

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care minimul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ este 0. **(5p)**

4. Să se determine numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea $f(1)=1$, $f(2)=2$. **(5p)**

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin^2 x=\sin x+2$. **(5p)**

6. Să se calculeze raza cercului înscris triunghiului ABC, pentru care $AB=3$, $BC=5$, $CA=4$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1&1&x\\1&x&1\\x&1&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $A(2)-A(-1)$. **(5p)**

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

b) Determinați valorile lui x pentru care $A(x)$ este inversabilă. **(5p)**

c) Determinați inversa lui $A(0)$. **(5p)**

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + aX + 1$, unde a este un număr real.

a) Calculați $f(i)$. **(5p)**

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f. **(5p)**

c) Determinați rădăcinile polinomului pentru $a = -1$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

a) Să se determine ecuația tangentei la graficul lui f în $(1, 0)$. **(5p)**

b) Să se determine asimptotele la graficul lui f. **(5p)**

c) Să se determine punctele de extrem ale lui f. **(5p)**

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{ax + b} dx$, a, $b > 0$, $n \geq 1$.

a) Pentru $a = b = 1$, să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se arate că $aI_{n+1} + bI_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geq 1$. **(5p)**

c) Pentru $a = 1$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Eduard Asadurian [1]

SUBIECTUL I

Fie sistemul $\begin{cases} x+2y-z & = & 4 \\ 3x-2y+(n-2)z & = & -4 \\ (m+1)x+4y-2z & = & 8 \end{cases}$, unde m și n sunt parametri reali.

a) Arătați că pentru orice valoare a lui $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

b) Arătați că pentru $n = 3$ soluțiile sistemului sunt independente de m.

c) Pentru $m = 1$ determinați mulțimea soluțiilor.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(2x-1)[x]}{x^2 - \{x\} + 1}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x.

a) Arătați că $f(x) \geq 0$ pentru toți $x \in \mathbb{R}$.

b) Cercetați dacă funcția f are asimptote.

c) Pentru $n \geq 1$ definim $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^\alpha}$, unde α este un parametru real.

SUBIECTUL al III-lea

Triunghiul ortic are vârfuri picioarele înălțimilor unui triunghi. Fie dat un triunghi ABC, H ortocentrul și R raza cercului circumscris.

a) Arătați că înălțimile triunghiului ABC sunt bisectoarele triunghiului său ortic.

b) Dacă A_1, B_1, C_1 sunt picioarele înălțimilor triunghiului ABC, cu notațiile $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a' = B_1C_1$, $b' = A_1C_1$ și $c' = A_1B_1$, sunt adevărate relațiile

$$AH = 2R|\cos A|,\ a' = R|\sin 2A|,$$

respectiv

$$\frac{AH}{|\cos A|} = \frac{BH}{|\cos B|} = \frac{CH}{|\cos C|} = 2R \text{ si } \frac{a'}{|\sin 2A|} = \frac{b'}{|\sin 2B|} = \frac{c'}{|\sin 2C|} = R$$

dacă triunghiul nu este dreptunghic.

c) Demonstrați că $AH^2 = 4R^2 - a^2$ și analoagele.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, ediasadurian@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu [2]

SUBIECTUL I

Fie sistemul $\begin{cases} mx+2y+3z &= 5 \\ 3x+my+2z &= 5 \\ 2x+3y+mz &= 8 \end{cases}$, cu m parametru real.

a) Studiați compatibilitatea sistemului.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x+y=3$.

c) Determinați $m \in \mathbb{N}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x+y+z \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{|x^2+5x+6|}{x^2+1}$.

a) Verificați dacă funcția f admite asimptote.

b) Calculați $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)(x^2+1)dx$.

c) Dacă $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)(x^2+1)}dx$, calculați limita $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

SUBIECTUL al III-lea

În sistemul de axe ortogonale se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$.

a) Determinați cordonatele unui punct C astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic isoscel, cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$.

b) Pentru fiecare C găsit la punctul a), determinați cordonatele unui punct D astfel încât patrulaterul $ABDC$ să fie pătrat.

c) Pentru $C(3,7)$, calculați aria patrulaterului $OACB$.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră

1. Fie ecuația
$$2x^3+x^2-(m+1)x-m=0.$$
   a) Arătați că ecuația admite o rădăcină independentă de m.
   b) Să se determine parametrul $m\in\mathbb{R}$ astfel ca toate rădăcinile ecuației date să fie mai mici ca 1.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com
[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

2. a) Definiția progresiei aritmetice.
   b) Demonstrați că orice termen al unei progresii aritmetice începând cu al doilea este media aritmetică a termenilor vecini lui.
   c) Enunțați și demonstrați formula termenului general al unei progresii aritmetice în funcție de primul termen al progresiei și de rația ei.
   d) Enunțați și demonstrați formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.
3. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x+y & = & 1 \\ 2x+z & = & n \\ mx+y+z & = & 4 \end{cases}$$
cu m și n parametri reali. Să se studieze compatibilitatea sistemului în funcție de m și n. În caz de compatibilitate, să se rezolve.
4. Fie mulțimea $M=[-1,+\infty)$ și fie $*: M\times M\to M$ operația dată de:
$$x * y = xy+x+y.$$
Formează cuplul $(M,*)$ o structură algebrică de grup? (Demonstrație).
5. Polinomul f cu coeficienți numere întregi are o rădăcină întreagă. Să se arate că pentru orice număr natural n produsul
$$f(0)f(1)...f(n)$$
este divizibil cu $(n+1)!$.

Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=a,\ a\geq 0$ dat și
$$x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2,\ \forall\ n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}.$$
În caz că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, să se determine
$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$
2. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația
$$x^3-2x^2+x+m=0,\ m\in\mathbb{R},$$
are toate rădăcinile reale.
3. Să se arate că inegalitatea
$$\ln(x+1)\geq\frac{2x}{x+2}$$
are loc pentru orice $x\geq 0$.
4. Fie
$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+4)^n},\quad n\in\mathbb{N}^*.$$
   a) Calculați I_1 și I_2.

b) Stabiliți o relație de recurență între termenii șirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

5. Fie F mulțimea funcțiilor derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) = f(1).$$

a) Să se determine funcțiile polinomiale de gradul trei aparținând lui F.

b) Să se arate că pentru orice funcție $f \in F$, ecuația $f'(x) = 0$, are cel puțin două soluții reale în intervalul $(0,1)$.

Geometrie și Trigonometrie

1. Considerăm trapezul $ABCD$ cu laturile paralele (AB), (CD) iar (AD), (BC) sunt laturi neparalele. Fie E intersecția dreptei AD cu cercul circumscris triunghiului BCD și F intersecția dreptei AD cu paralela din C la BE. Presupunând că $A \in (EF)$, să se arate că:

a) patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil;

b) BC este medie geometrică între AD și EF.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = m$$

să admită soluția

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Dacă H este ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, iar S este aria triunghiului ABC, să se arate că:

a) $AH = 2R\cos A$;

b) $a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH = 4S$.

4. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$, $AB \perp BD$ și $AC \perp CD$, atunci piciorul înălțimii tetraedrului dusă din vârful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

5. Într-un reper cartezian se consideră triunghiul cu vârfurile $A(4,1)$, $B(2,3)$, $C(3,-1)$. Determinați:

a) ecuația medianei din C;

b) ecuația înălțimii din C;

c) coordonatele centrului de greutate;

d) aria triunghiului ABC.

e) distanța de la punctul C la latura AB.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1994)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Antonio-Mihail Nuică [1]

1. Să se determine valoarea integralei $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

   a) e; b) $2-e$; c) $1+e$; d) $2e$; e) $e-2$.
2. Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care $-x^2 - mx + 2 < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   a) $\mathbb{R}$; b) $(2\sqrt{2}, \infty)$; c) $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$; d) $\emptyset$; e) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
3. Să se determine suma soluțiilor ecuației $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

   a) 1; b) 2; c) 0; d) 3; e) -1.
4. Să se determine valoarea parametrului real a pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(1-a)x^2}{x^2 - x + 1}$ are ca asimptotă orizontală la G_f spre $\pm\infty$ dreapta de ecuație $y = 4$.

   a) 1; b) -3; c) 2; d) 4; e) 0.
5. Să se determine numărul funcțiilor injective $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ cu proprietatea $f(1) = 1$.

   a) 81; b) 256; c) 6; d) 9; e) 27.
6. Să se determine suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$.

   a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 0; d) 2; e) $2 + \sqrt{2}$.
7. Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}$ este compatibil determinat.

   a) $\mathbb{R}$; b) $\{1\}$; c) $\{2\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; e) $\mathbb{R}^*$.
8. Să se determine o relație de recurență pentru şirul $I_n := \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+2} dx$, $n \geq 1$.

   a) $I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geq 1$; b) $2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geq 1$; c) $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \geq 1$; d) $2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$; e) $I_{n+1} + I_n = \dfrac{2}{n}$, $n \geq 1$.
9. Să se determine matricea $B = A^2 + A + I_2$, dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

   d) $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

10. Să se determine derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

    a) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; b) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$; c) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

    d) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$; e) $f'(x)=\dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$.

11. Să se determine elementul neutru al legii de compoziție $x\circ y=xy-2x-2y+6$, $x,y\in(2,\infty)$.

    a) $e=2$; b) $e=3$; c) $e=4$; d) $e=0$; e) $e=6$.

12. Să se determine modulul numărului complex $z=\left(\dfrac{8+6i}{3-4i}\right)^{2019}$.

    a) $(\sqrt{2})^{2019}$; b) 1; c) 2^{2019}; d) 0; e) 5^{2019}.

13. Să se determine punctul de intersecție al graficelor funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=2x-1$.

    a) $(2,3)$; b) $(2,1)$; c) $(3,2)$; d) $(2,2)$; e) $(2,-3)$.

14. Să se determine termenul a_{10} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_2=3$, $a_4=15$.

    a) 57; b) 50; c) 51; d) 54; e) 17.

15. Să se determine valoarea parametrului real a pentru care funcția

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+(2-a), & x\leq 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\end{cases}$$

    este continuă.

    a) 0; b) 1; c) -1; d) 2; e) $1/2$.

Testul 2

D.M.I. [2]

1. Valoarea parametrului $m\in\mathbb{R}^\star$, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} 2x+m & \text{dacă } x\leq 2\\ mx+2 & \text{dacă } x>2\end{cases}$$

este bijectivă, este

a) $m=-2$; b) $m=3$; c) $m=2$; d) $m=0$; e) $m=-1$.

2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|1-x|=x-1$ este

a) $S=(-1,1]$; b) $S=[1,+\infty)$; c) $S=(-2,3]$; d) $S=(-\infty,1]$; e) $S=(1,+\infty)$.

[2] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

3. Inversa funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{dacă } x \leq 4 \\ 3x - 11 & \text{dacă } x > 4 \end{cases}$$

este

a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3x + 2 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$; b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \dfrac{x + 11}{3} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$;

c) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dacă } x \leq 1 \\ \dfrac{x + 2}{11} & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$; d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dacă } x \leq 1 \\ \dfrac{x + 11}{3} & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dacă } x \leq 2 \\ 3x - 11 & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$.

4. Valoarea parametrului real m pentru care suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei

$$x^2 + (m + 1)x - (m + 6) = 0$$

are cea mai mică valoare este:

a) $m = -3$; b) $m = -2$; c) $m = -1$; d) $m = 2$; e) $m = 1$.

5. Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + 4 = 0$, atunci

$$E = \frac{x_1^2 - 4x_1 + 5}{x_1^2 - 6x_1 + 10} + \frac{x_2^2 - 4x_2 + 5}{x_2^2 - 6x_2 + 10} =$$

a) $\dfrac{1}{3}$; b) $-\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{1}{4}$; e) 1.

6. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$ este

a) $\left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$; b) $\left\{\dfrac{3}{2}, 2\right\}$; c) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; d) $\{2\}$; e) $\emptyset$.

7. Dacă x este soluţia ecuaţiei $\log_2(2\log_3(3\log_4 x)) = 1$, atunci $\log_4 x + \log_2 x =$

a) -1; b) 4; c) 2; d) 3; e) 0.

8. Termenul din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$$

în care nu apare x este

a) T_7; b) T_5; c) T_6; d) T_{23}; e) T_8.

9. Limita şirului $(a_n)_{n>0}$,

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

este

a) 0; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) ∞.

10.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2-\sqrt{n}} =$$

a) $\frac{1}{6}$; b) 0; c) ∞; d) 1; e) $\frac{1}{2}$.

11.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} =$$

a) $\frac{1}{8}$; b) 0; c) $+\infty$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{4}$.

12. Valoarea parametrului real a, pentru care funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} e^x+x^2+ax-2 & \text{dacă } x\le 1\\ x^{\frac{1}{x-1}} & \text{dacă } x>1\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$, este

a) $a=0$; b) $a=1$; c) $a=2$; d) $a=-2$; e) $a=3$.

13. Primitivele funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^k\ln x,\quad k\in\mathbb{N}^\star$$

sunt

a) $\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\ln\frac{x^{k+1}}{e}+\mathcal{C}$; b) $\frac{x^k}{(k+1)^2}\ln x+\mathcal{C}$; c) $\frac{x^{k+1}}{k^2}\ln x^k+\mathcal{C}$;

d) $\frac{x^k}{k^2}\ln\frac{x^k}{e}+\mathcal{C}$; e) $\frac{x^{k+2}}{(k+2)^2}\ln\frac{x^{k+2}}{e}+\mathcal{C}$.

14. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Atunci $\int_{-1}^{1} f(x)dx =$

a) $\frac{1}{e}-\frac{1}{6}$; b) $\frac{11}{6}-\frac{1}{e}$; c) $2-\frac{1}{e}$; d) $\frac{5}{6}-\frac{1}{e}$; e) $\frac{5}{6}+\frac{1}{e}$.

15. Volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2}}$$

este egal cu

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{2\pi}{5}$; e) $\frac{3\pi}{2}$.

Testul 3

D.M.I. [3]

1. Valoarea expresiei $E = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, este

a) 1; b) -1; c) 3; d) -2; e) 2.

2. Dacă $x^2 + 3x + 3 = 0$ şi

$$S = (x + 1)^{100} + \frac{1}{(x + 1)^{100}},$$

atunci

a) $S = 3$; b) $S = -3$; c) $S = -2$; d) $S = -1$; e) $S = 1$.

3. Soluţia ecuaţiei $\log_2 [3 - \log_3(x + 1)] = 0$ este

a) $x = 3$; b) $x = 2$; c) $x = 5$; d) $x = 6$; e) $x = 8$.

4. În dezvoltarea

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt[3]{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$$

mulţimea termenilor în care x şi y au puteri egale este

a) $\emptyset$; b) $\{T_{18}\}$; c) $\{T_{11}\}$; d) $\{T_{15}\}$; e) $\{T_7\}$.

5. Ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ are rădăcinile

a) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = x_3 = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\star$" prin relaţia

$$x \star y = xy - 2x - 2y + m.$$

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

Legea de compoziţie admite element neutru pentru

a) $m=-4$; b) $m=6$; c) $m=-6$; d) $m=0$; e) $m=4$.

7. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-2x^2+mx+2=0$, atunci valoarea parametrului real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$ este

a) $m=3$; b) $m=-2$; c) $m=1$; d) $m=-1$; e) $m=2$.

8. Polinomul f de gradul 3, cu coeficienţi reali, care împărţit la x^2-2x dă restul $2x+1$, iar împărţit la x^2-1 dă restul x, este

a) $f=x^3+2x+1$; b) $f=x^3+x^2-x+2$; c) $f=x^3-x^2+1$;

d) $f=x^3+2x^2-x+1$; e) $f=x^3-3x+1$.

9. Cel mai mare termen al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$,

$$x_n=-\frac{n^2}{2}+\frac{31\cdot n}{3}+3,$$

este

a) $\frac{1015}{18}$; b) $\frac{169}{3}$; c) $\frac{31}{3}$; d) $\frac{337}{6}$; e) $\frac{111}{2}$.

10. Dacă

$$L_1=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{4}-1\right)$$

şi

$$L_2=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+n+1},$$

atunci $\frac{L_1}{L_2}=$

a) 2; b) e; c) 1; d) $\ln 2$; e) 0.

11. Se consideră funcţia

$$f:[1,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{dacă } 1\leq x\leq 2\\ \frac{x^2}{4}+1 & \text{dacă } 2<x\leq 3\end{cases}.$$

Aplicând teorema Lagrange pentru funcţia f pe intervalul $[1,3]$ se obţine $c=$

a) $\frac{7}{3}$; b) $\frac{9}{4}$; c) $\frac{3}{2}$; d) 2; e) $\frac{18}{5}$.

12. Funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x+m}{x^2+x+1}$$

are exact două puncte de extrem local dacă şi numai dacă

a) $m = 1$; b) $m = -2$; c) $m \in (-\infty, 1)$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) $m \neq 2$.

13.

$$\int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx =$$

a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{7}{4}$; e) 4.

14. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{1 - 2x, x^2 - 2\}$, atunci

$$\int_{0}^{2} f(x)dx =$$

a) $-\frac{11}{3}$; b) $-\frac{8}{3}$; c) 2; d) $\frac{8}{3}$; e) 0.

15. Aria mulţimii mărginită de graficele funcţiilor

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$$

şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ este

a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{32}{3}$; c) $\frac{10}{3}$; d) $\frac{9}{2}$; e) $\frac{x+1}{4}$.

Testul 4

Raluca Mihaela Georgescu [4]

1. Soluțiile reale ale ecuației $(\sqrt[4]{16})^{x^2+2x-\log_2 2^3} = \sqrt{4^5}$ sunt:

   a) $\{2, -4\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-4\}$; d $\{2, 3\}$; e) $\{-2, -4\}$.
2. Mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $2,\ x,\ 18$ reprezintă o progresie geometrică și $1,\ x,\ 11$ reprezintă progresie aritmetică este:

   a) $\{3\}$; b) $\{-6\}$; c) $\{-6, 6\}$; d) $\{6\}$; e) $\{4\}$.
3. Limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1} - \sqrt{n^2+n}}{n+5}$ este:

   a) 0; b) ∞; c) 1; d) -1; e) $-\infty$.
4. Restul împărțirii polinomului $f = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 5$ la $x + 1$ este

   a) -2; b) -8; c) -10; d) 2; e) 1.
5. Volumul corpului de rotație obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$, $x \in [e, e^2]$ este:

   a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{3\pi}{2}$; c) $\frac{5\pi}{2}$; d)π ; e) 2π.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

6. Numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{5^3}\right)^{15}$ este

   a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 0.

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_0^x e^{t^2+1}dt$. Atunci $f'(x)$ este

   a) $2xe^{x^2+1}$; b) xe^{x^2+1}; c) e^{x^2+1}; d) e^{2x}; e) xe^{2x}.

8. Valoarea parametrului real m pentru care rădăcinile polinomului $f=x^3+2x^2+x+m=0$ satisfac relația $x_1^4+x_2^4+x_3^4=18$ este

   a) 2; b) 3; c) -2; d) 4; e) 0.

9. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n^6-5}}}{\sqrt{n^2+4}}$ este

   a) 1 ; b) 0; c) 2; d) -1 ; e) 3.

10. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $\star$, $x\star y=xy+ax+by+2$. Valorile parametrilor reali a și b pentru care legea de compoziție $\star$ este comutativă și asociativă sunt:

    a) $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$;

    d) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$.

11. Valoarea integralei $I=\int\limits_0^2\dfrac{3x+2}{3x^3+2x^2+12x+8}dx$ este

    a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $\dfrac{1}{8}$; c) $\dfrac{\pi}{8}$; d) $\dfrac{1}{4}$; e) $\dfrac{1}{2}$.

12. Suma cuburilor rădăcinilor ecuației $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3+x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix}$ este

    a) 8; b) 1; c) 55; d) 26; e) -53.

13. Mulțimea asimptotelor la graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+5}{|x|-2}$ este:

    a) $\{x=2,\ y=1\}$; b) $\{x=2,\ x=-1,\ y=1\}$; c) $\{x=-2,\ y=1,\ y=-1\}$;

    d) $\{x=2,\ x=-2,\ y=1,\ y=-1\}$; e) $\{x=2,\ x=-2,\ y=1\}$.

14. Valorile reale ale parametrului real m pentru care ecuația $x^3-3x^2-24x+m=0$ are toate rădăcinile reale și distincte sunt

    a) $(-28,80)$; b) $[-28,80]$; c) $[-26,80)$; d) $(-26,70)$; e) $[-28,80)$.

15. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $9^x-4\cdot 3^{x+1}+3^3=0$, atunci $|x_1-x_2|$ este

    a) 6; b) 0; c) -1; d) 1; e) 3.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Sofia-Elena Ciobanu [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Expresia C/C++, `12/13*3%2` are valoarea: **(4p.)**

   a) 3 b) 0 c) 1 d) 2

2. Se consideră algoritmul următor, reprezentat în pseudocod:

```
intreg n, s, uc
citeste n (numar natural cu cel putin 2 cifre)
s←0
cat timp n>0 executa
|   cat timp n>9 executa
|    |   uc←n%10
|    |   s←s+uc
|    |_  n←n/10
|    s←s+n
|_   citeste n
scrie s
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc pe rând numerele 1234 2345 3456 0. **(6p.)**

   b) Scrieți cinci numere distincte astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afișeze valoarea 8. **(4p.)**

   c) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind structura **cât timp** ... **execută** cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii 1 și 2 încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care valori se vor afișa în urma executării următoarei secvente de instrucțiuni? **(4p.)**

```
int a=4,b=3,c=2,d=1;
d /= a *= b += c%2+5;
cout<<a<<" "<<b<<" "<<c<<" "<<d;
    | printf("%d %d %d %d",a,b,c,d);
```

[1] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești, stefanescu_sofia@yahoo.com

a) 32 8 2 1 b) 32 8 2 0 c) 1 8 32 0 d) 2 3 4 6

2. Stabiliți care dintre următoarele expresii are valoarea **1** dacă și numai dacă numărul întreg memorat în variabila **a** nu aparține intervalului **(-37,-27]** **(4p.)**

a) (a <= -37) ||(a == -27)
b) (a <= -37) ||(a > -27)
c) (a == -37) ||(a == -27)
d) (a == -37) && (a == -27)

Scrieți răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

3. Fie **c** un cuvânt de cel mult 15 caractere format din litere mari și mici ale alfabetului englez. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură cuvântul **c** și afișează pe ecran cuvântul obținut prin eliminarea literelor mari. **(6p.)**
4. Se citesc **n** numere naturale. Calculați media aritmetică a tuturor numelelor care au toate cifrele egale.
   a) Scrieți în pseudocod algoritmul de rezolvare. **(10p.)**
   b) Precizați rolul tuturor variabilelor care au intervenit în algoritmul realizat și indicați datele de intrare și datele de ieșire ale problemei enunțate. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie matricea $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$ cu liniile și coloanele numerotate de la 1 și având elemente întregi. Care este efectul secvenței de instrucțiuni de mai jos? **(4p.)**

```
for(j=1; j<4; j++)
    for(i=1; i<3; i++)
        cout<<a[i][j]<<" "; | printf("%d ",a[i][j]);
```

a) **10 11 12 13 14 15 16 17**
b) **10 14 11 15 12 16**
c) **18 22 19 23 20 24**
d) **10 15 20 25 22 19 16 13**

Scrieți răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

2. Variabilele **i** și **j** sunt de tip întreg. Scrieți expresia care poate înlocui punctele de suspensie, astfel încât în urma executării secvenței să se afișeze indicii elementelor egale cu valoarea maximă, dintr-o matrice cu 8 linii și 8 coloane numerotate de la 1 la 8. **(6p.)**

```
max=a[1][1];
for(i=1; i<=8; i++)
    for(j=1; j<=8; j++)
        if(max<a[i][j])
            max=a[i][j];
for(i=1; i<=8; i++)
    for(j=1; j<=8; j++)
        if(.................)
            cout<<i<<" "<<j<<endl; | printf("%d %d\n",i,j);
```

3. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural **n** și cele **n** elemente ale unui tablou unidimensional, numere întregi. Determinați cea mai lungă secvență formată din elemente egale existentă în vector și afișați lungimea acestei secvențe. **(10p.)**

   De exemplu, pentru **n=6** și elementele tabloului **4 5 5 5 5 90** se va afișa **4**.
4. Fișierul **numere.txt** conține pe o singură linie, separate prin câte un spațiu, cel mult 50 de numere întregi. Scrieți un program C/C++ care citește numerele din fișierul **numere.txt** și afișează pe ecran, separate prin câte un spațiu în ordine crescătoare, toate numerele din fișier care au proprietatea că sunt prime. Dacă fișierul nu conține astfel de numere, se va afișa mesajul NU EXISTĂ NUMERE PRIME.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul utilizat. **(4p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător. **(6p.)**

Testul 2

Maria Miroiu [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Cărui interval îi aparține valoarea memorată de variabila **x** astfel încât expresia **!((x<=0)||(x>99))**, scrisă în limbajul C/C++, să aibă valoarea **1**? **(4p.)**

   a) $[0, 99)$
   b) $(0, 99)$
   c) $(0, 99]$
   d) $(\infty, 0] \cup (99, +\infty)$

2. Variabila **x** memorează un număr natural care are exact 3 cifre. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos are ca valoare numărul obținut prin ștergerea cifrei din mijloc a numărului **x**? **(4p.)**

   a) `x/100+x%10`
   b) `x - x/100*10`
   c) `x/100`
   d) `x/100*10+x%10`

3. Pentru arborele cu 8 noduri reprezentat prin vectorul „de tați” T = (5,8,0,5,3,3,6,5), scrieți care este nodul cu cei mai mulți fii și numărul frunzelor arborelui. **(4p.)**

   a) 5, 5 b) 3, 4 c) 5, 4 d) 3, 5

4. În secvența alăturată, variabilele **i**, **j**, **x** sunt de tip întreg, iar variabila **a** memorează o matrice cu liniile și coloanele numerotate de la **1** la **4**. Care este suma elementelor de pe linia a doua? **(4p.)**

   a) 34 b) 36 c) 30 d) 32

```
x=2;
for (j=1; j<=4; j++)
   for (i=1; i<=4; i++)
   {
    a[i][j]=x;
    x=x+1;
   }
```

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@yahoo.com

5. În secvența alăturată, variabilele **x**, **n**, **uc** sunt de tip întreg. S-a notat cu **a%b** restul împărțirii lui **a** la **b**. **x** va fi: **(4p.)**

```
x←1
 cat timp n>0 executa
 |   uc←n%10
 |   daca uc%2=1 atunci
 |   |    x←x*uc
 |_  n←[n/10]
```

   a) suma cifrelor numărului **n**
   b) produsul cifrelor numărului **n**
   c) produsul cifrelor pare ale lui **n**
   d) produsul cifrelor impare ale lui **n**

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod. S-a notat cu **a%b** restul împărțirii lui **a** la **b**.

```
citeste n,a,b
(numere naturale,1<n<a<b)
k←0
pentru i←a,b executa
|   daca i%n=1 atunci
|_  |_k←k+1
scrie k
```

   a) Scrieți ce se va afișa dacă se citesc valorile **3**, **5**, **11**. **(6p.)**
   b) Considerând că se citește pentru **n** valoarea **4**, scrieți cel mai mic număr impar de două cifre care se poate citi ca valoare a variabilei **a** și cel mai mare număr par de două cifre, mai mic sau egal decât **25** care se poate citi ca valoare a variabilei **b** astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze valoarea **2**. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Variabila **P** este un punct în plan care memorează într-o structură abscisa și ordonata acestuia. Scrieți declararea variabilei **P** și o secvență de instrucțiuni C/C++ care afișează mesajul ,,pe axe" dacă punctul **P** se află pe axa **Ox** sau pe axa **Oy**, sau ,,nu pe axe" în caz contrar. **(6p.)**
3. Se consideră două tablouri unidimensionale ordonate descrescător: **x** cu 5 componente întregi pare și **y** cu 3 componente întregi impare. Dați exemplu de astfel de tablouri și specificați tabloul unidimensional ordonat crescător care se obține prin interclasarea acestora. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural **n**. Să se scrie un program C/C++ care determină numărul **m** format din cifrele prime ale lui **n** (în ordinea în care apar în numărul **n**). **(10p.)**
2. Se citește de la tastatură un număr natural **n** care nu este număr prim. Scrieți un program C/C++ care determină valoarea maximă dintre puterile la care apar divizorii primi în cadrul descompunerii numărului **n** în factori primi. **(10p.)**

   Exemplu: Pentru $\mathbf{n = 12}$ (care se descompune în $2^2 * 3^1$) se va afișa valoarea **2**, iar

pentru **n = 450** (care se descompune în $2^1 * 3^2 * 5^2$) se va afișa valoarea **2**.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei **n**, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale de cel mult 4 cifre fiecare, numerele fiind despărțite prin spații. Se cere să se stabilească cele mai mari două numere impare din cele **n** numere din fișier.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program C/C++ care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   10

   5 16 11 7 14 6 17 6 9 18

   pe ecran se va afișa 17 11.

Testul 3

Maria Miroiu [3]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Cărui interval îi aparține valoarea memorată de variabila **x** astfel încât expresia **not((x<=0)or(x>99))**, scrisă în limbajul **Pascal**, să aibă valoarea **true**? **(4p.)**

   a) $[0, 99)$
   b) $(0, 99)$
   c) $(0, 99]$
   d) $(\infty, 0] \cup (99, +\infty)$

2. Variabila **x** memorează un număr natural care are exact 3 cifre. Care dintre expresiile **Pascal** de mai jos are ca valoare numărul obținut prin ștergerea cifrei din mijloc a numărului **x**? **(4p.)**

   a) `x div 100 + x mod 10`
   b) `x - (x div 100)*10`
   c) `x div 100`
   d) `(x div 100)*10 + x mod 10`

3. Pentru arborele cu 8 noduri reprezentat prin vectorul „de tați” T = (5,8,0,5,3,3,6,5), scrieți care este nodul cu cei mai mulți fii și numărul frunzelor arborelui. **(4p.)**

   a) 5, 5 b) 3, 4 c) 5, 4 d) 3, 5

4. În secvența alăturată, variabilele **i**, **j**, **x** sunt de tip întreg, iar variabila **a** memorează o matrice cu liniile și coloanele numerotate de la **1** la **4**. Care este suma elementelor de pe linia a doua? **(4p.)**

   a) 34 b) 36 c) 30 d) 32

```
x:=2;
for j:=1 to 4 do
   for i:=1 to 4 do
   begin
      a[i][j]:=x;
      x:=x+1;
   end;
```

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@yahoo.com

5. În secvența alăturată, variabilele **x**, **n**, **uc** sunt de tip întreg. S-a notat cu **a%b** restul împărțirii lui **a** la **b**. **x** va fi: **(4p.)**

```
x←1
cat timp n>0 executa
|   uc←n%10
|   daca uc%2=1 atunci
|   |    x←x*uc
|_  n←[n/10]
```

   a) suma cifrelor numărului **n**
   b) produsul cifrelor numărului **n**
   c) produsul cifrelor pare ale lui **n**
   d) produsul cifrelor impare ale lui **n**

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod. S-a notat cu **a%b** restul împărțirii lui **a** la **b**.

```
citeste n,a,b
(numere naturale,1<n<a<b)
k←0
pentru i←a,b executa
|   daca i%n=1 atunci
|_  |_k←k+1
scrie k
```

   a) Scrieți ce se va afișa dacă se citesc valorile **3**, **5**, **11**. **(6p.)**
   b) Considerând că se citește pentru **n** valoarea **4**, scrieți cel mai mic număr impar de două cifre care se poate citi ca valoare a variabilei **a** și cel mai mare număr par de două cifre, mai mic sau egal decât **25** care se poate citi ca valoare a variabilei **b** astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze valoarea **2**. **(6p.)**
   c) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura **pentru ... executa** cu o structură repetitivă cu test inițial. **(6p.)**
   d) Scrieți programul **Pascal** corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

2. Variabila **P** este un punct în plan care memorează într-o structură abscisa și ordonata acestuia. Scrieți declararea variabilei **P** și o secvență de instrucțiuni **Pascal** care afișează mesajul ,,pe axe" dacă punctul **P** se află pe axa **Ox** sau pe axa **Oy**, sau ,,nu pe axe" în caz contrar. **(6p.)**
3. Se consideră două tablouri unidimensionale ordonate descrescător: **x** cu 5 componente întregi pare și **y** cu 3 componente întregi impare. Dați exemplu de astfel de tablouri și specificați tabloul unidimensional ordonat crescător care se obține prin interclasarea acestora. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citește de la tastatură un număr natural **n**. Să se scrie un program **Pascal** care determină numărul **m** format din cifrele prime ale lui **n** (în ordinea în care apar în numărul **n**). **(10p.)**
2. Se citește de la tastatură un număr natural **n** care nu este număr prim. Scrieți un program **Pascal** care determină valoarea maximă dintre puterile la care apar divizorii primi în cadrul descompunerii numărului **n** în factori primi. **(10p.)**

   Exemplu: Pentru $\mathbf{n = 12}$ (care se descompune în $2^2 * 3^1$) se va afișa valoarea **2**, iar

pentru $\mathbf{n = 450}$ (care se descompune în $2^1 * 3^2 * 5^2$) se va afișa valoarea **2**.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei **n**, iar pe următoarea linie un șir de **n** numere naturale de cel mult 4 cifre fiecare, numerele fiind despărțite prin spații. Se cere să se stabilească cele mai mari două numere impare din cele **n** numere din fișier.

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program **Pascal** pentru citirea datelor din fișier și rezolvarea problemei. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   10

   5 16 11 7 14 6 17 6 9 18

   pe ecran se va afișa 17 11.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Ionela Eliza Popa [1], *Viorel Popa* [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se dau variabilele **a** și **b** de tip întreg, **a** memorând valoarea **4**, iar **b** valoarea **2**. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos are valoarea **0**? **(4p.)**

   a) `a-b != 0`
   b) `a+b > a%b+1`
   c) `a-2*b == 0`
   d) `!(a == 2*b))`

2. Funcția **f** are definiția din dreapta:

   Care este cea mai mare valoare de **5** cifre pe care o poate avea o variabilă **x**, astfel încât pentru apelul **f(x)** să se obțină o valoare de **5** cifre identice? **(4p.)**

   a) 90000
   b) 19999
   c) 99999
   d) 10000

```
int f(int x)
{if (x==0) return 0;
    if (x%2==1)
        return
        f(x/10)*10+x%10-1;
    else
        return
        f(x/10)*10+x%10+1;}
```

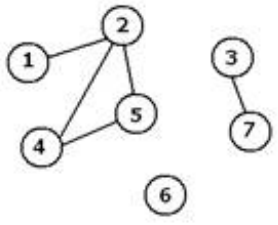
3. Utilizând metoda backtracking se generează toate cuvintele formate din trei vocale litere mici. Cuvintele sunt generate în ordine lexicografică. Primele trei soluții sunt: **aaa**, **aae** și **aai**. Afișați antepenultima soluție. **(4p.)**

   a) uuo b) uui c) uou d) uuu

4. Prin înălțimea unui arbore cu rădăcină înțelegem numărul de muchii ale celui mai lung lanț format din noduri distincte care are una dintre extremități în rădăcina arborelui. Scrieți care este rădăcina și care este înălțimea arborelui descris prin următorul vector „de tați”: **(0,1,1,1,4,4,6,7)**. **(4p.)**

   a) 1, 5 b) 8, 4 c) 1, 3 d) 1, 4

5. Pentru graful din imagine scrieți numărul maxim de componente conexe care se pot obține eliminând două muchii. **(4p.)**



   a) 4 c) 3
   b) 5 d) 6

[1] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Mihalache” Topoloveni, bodoronceaeliza@yahoo.com
[2] Profesor, Liceul Teoretic „Ion Mihalache”, Topoloveni, popaviorel13@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

1. Se consideră algoritmul din dreapta reprezentat în pseudocod:

   S-a notat cu **x%y** restul împărțirii numărului întreg **x** la numărul întreg nenul **y** și cu [**a**] partea întreagă a numărului real **a**.

   a) Scrieți ce se va afișa dacă se citesc, în această ordine, numerele: **12 23 34 592 13 39 91 1 0**? **(6p.)**
   b) Scrieți un set de date de intrare pentru care algoritmul, în urma executării, va afișa valoarea **1234**. **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască structura **cât timp t>9 execută...** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

```
citeste x,y (nr. naturale)
p←1
cat timp y>0 executa
|  t←y
|  cat timp t>9 executa
|  |_  t←[t/10]
|  daca x%10 = t atunci
|  |   p←p+1
|  |altfel
|  |   scrie p
|  |_  p←1
|  x←y
|_ citeste y (nr. natural)
 scrie p
```

2. În declararea următoare, câmpurile **x** și **y** ale înregistrării pot memora coordonatele carteziene ale unui punct din planul **xOy**. Scrieți o expresie în limbajul C/C++ care să aibă valoarea **1** dacă și numai dacă punctele memorate în variabilele **A** și **B** sunt situate la egală distanță față de originea axelor de coordonate, **O**. **(6p)**

```
struct punct
{
  float x,y;
} A,B;
```

3. Se consideră următoarea secvență de program în care variabila **a** memorează elementele unui tablou bidimensional cu **5** linii și **5** coloane, numerotate de la **1** la **5**, iar celelalte variabile sunt de tip întreg. Specificați care va fi conținutul variabilei **a** în urma executării secvenței din dreapta, dacă inițial variabila **a** avea conținutul de mai jos: **(6p.)**

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

```
int a[6][6],aux;
for (i=1;i<=2;i++)
   for (j=i;j<=6-i;j++)
   {
   aux=a[i][j];
   a[i][j]=a[6-i][j];
   a[6-i][j]=aux;
   }
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Scrieți definiția completă a subprogramului **nr**, care să calculeze și să returneze numărul de cifre de 0 cu care se termină **n!**, **n** primit ca parametru. **(10p)**

Exemplu: 106! se termină cu 25 de cifre de 0.

2. Se consideră un text cu maximum 250 de caractere, format din litere mici ale alfabetului englez și spații. Cuvintele sunt separate printr-un singur spațiu. Scrieți programul C/C++ care citește textul considerat și afișează pe ecran acele cuvinte în care vocalele apar în ordine alfabetică (**a**,**e**,**i**,**o**,**u**) și nicio vocală nu se repetă. **(10p.)**

   Exemplu: Pentrul textul ***introduc o noua variabila care va retine adresa unui vector,*** se va afișa ***introduc o care va vector.***

3. Fișierul de intrare **date.in** conține un șir cu cel mult un milion de numere naturale cu maximum nouă cifre fiecare, separate prin câte un spațiu.

   a) Scrieți un program care, utilizând un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de executare și al spațiului de memorie utilizat, citește din fișier toți termenii șirului, determină și afișează în fișierul **date.out**, numărul termenilor care încep și se termină cu cifra **1**, apoi numărul termenilor care încep și se termină cu cifra **2,...,** numărul termenilor care încep și se termină cu cifra **9**. Cele nouă numere determinate se vor afișa pe prima linie a fișierului, separate prin câte un spațiu. **(8p.)**

   Exemplu: Dacă fișierul **date.in** are conținutul
   13
   2842 121 9839 94 9 223 22 1 66 454 43 33 383

   fișierul **date.out** va avea conținutul: **2 2 2 1 0 1 0 0 2** deoarece sunt doi termeni care încep și se termină cu **1** (**1**2**1**,**1**), **2** termeni care încep și se termină cu **2** (**2**84**2**,**22**), etc.

   b) Descrieți în limbaj natural metoda de rezolvare folosită și explicați în ce constă eficiența ei. **(2p.)**

Testul 2

Ionela Eliza Popa [3], *Viorel Popa* [4]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se dau variabilele **x** și **y** de tip întreg. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos are valoarea **1** dacă numărul memorat în **x** aparține intervalului **(1,4]** și numărul memorat în **y** aparține intervalului **(-1,2]**? **(4p.)**

   a) `x*y-8 != 0`
   b) `x*(y-5) > 0`
   c) `x*(y-5) == 0`
   d) `x*(y-9) < 0`

[3] Profesor, Liceul Teoretic ,,Ion Mihalache" Topoloveni, bodoronceaeliza@yahoo.com
[4] Profesor, Liceul Teoretic ,,Ion Mihalache", Topoloveni, popaviorel13@yahoo.com

2. Se consideră subprogramul **rec** cu definiția din dreapta.

   Scrieți o valoare pe care o poate primi parametrul **n** astfel încât în urma apelului **rec(n,2)** să se afișeze valorile **2 3**. **(4p.)**

   a) 7
   b) 17
   c) 0
   d) 4

```
void rec(int n, int d)
{
    if (d*d<n)
    { cout<<d<<" ";
      |printf("%d",d);
      d++;
      rec(n,d+1);
      cout<<d<<" ";
      |printf("%d",d);
    }
}
```

3. Folosind numai cifrele **{0, 1, 2, 3}**, se construiesc, prin metoda Backtracking, toate numerele cu **3** cifre în care oricare două cifre alăturate nu au aceeași paritate. Se obțin în ordine numerele: **101**, **103**, **121, 123, 213,...**. Utilizând aceeași metodă pentru a obține numere cu patru cifre din mulțimea **{0,1,2,3,4}** în care oricare două cifre alăturate nu au aceeași paritate care este al **4**-lea număr generat? **(4p.)**

   a) 1034 b) 1030 c) 1012 d) 1232

4. Se consideră arborele dat prin următorul vector "de tați": **(5, 5, 2, 5, 0, 2, 2, 9, 7, 7)**. Știind că rădăcina se află pe nivelul 0, stabiliți care este numărul ascendenților nodului **8** din arbore: **(4p.)**

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5. Fie **G=(X,V)** un graf neorientat, unde **X** este mulțimea vârfurilor și **V** mulțimea muchiilor. Graful **G** este complet dacă: **(4p.)**

   a) un vârf are cel puțin **n** muchii adiacente;
   b) matricea de adiacență asociată are toate elementele egale cu **1**;
   c) ordinul grafului este **n-1**;
   d) are **n(n-1)/2** muchii, unde **n** este numărul de vârfuri.

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

1. Se consideră algoritmul din dreapta reprezentat în pseudocod.

   S-a notat cu **a%b** restul împărțirii numărului întreg **a** la numărul întreg nenul **b** și cu **[a]** partea întreagă a numărului real **a.**

```
citeste n (numar natural)
r←0
cat timp n>0 executa
|  r←r*10+n%10
|_ n←[n/10]
cat timp r>0 executa
|  daca r%2 = 0 atunci
|  |_  n←n*10+r%10
|_  r←[r/100]
scrie n
```

   a) Ce valoare va fi afișată dacă se citește pentru **n** valoarea **23758**? **(6p.)**
   b) Scrieți un număr natural format din exact 5 cifre care poate fi citit pentru variabila **n** astfel încât în urma executării algoritmului să se afișeze valoarea **4**. **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**

d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, în care să se înlocuiască fiecare structură **cât timp...execută** cu câte o structură repetitivă cu test final. **(6p.)**

2. Se consideră tipul de date **elev**, dat prin declararea din dreapta. Scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia câmpul **calific** al variabilei **x** să memoreze unul din șirurile de caractere: **FOARTE BINE**, dacă media aritmetică a câmpurilor **nota1** și **nota2** este mai mare sau egală cu 9, **BINE**, dacă media aritmetică a câmpurilor **nota1** și **nota2** este strict mai mică decât 9 și mai mare sau egală cu 8, respectiv **SUFICIENT**, dacă media aritmetică a câmpurilor **nota1** și **nota2** este mai mică decât 8. **(6p.)**

```
struct elev
   {
   int nota1,nota2;
   char calific[13];
   };
elev x;
```

3. În secvența alăturată, variabilele **i** și **j** sunt de tip **int**, iar variabila **a** memorează o matrice cu **5** linii și **5** coloane (numerotate de la **1** la **5**) cu elemente de tip **int**. Care este suma elementelor de pe diagonala secundară a matricei **a** la finalul executării secvenței? **(6p.)**

```
for (i=1;i<=5;i++)
{
   x=i;
   for (j=5;j>=1;j--)
   {
   x++;
   a[i][j]=x;
   }
}
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Scrieți definiția completă a subprogramului **p** care primește prin intermediul parametrului **n** un număr natural nenul **(n≤50),** iar prin intermediul parametrului **a** un tablou unidimensional cu **n** componente întregi, de maximum 5 cifre fiecare și pozițiile numerotate începând de la 1. Subprogramul furnizează prin intermediul parametrului **max** valoarea maximă din tabloul **a**, prin intermediul parametrului **imax** indicele valorii maxime din **a**, iar prin intermediul parametrului **sum** suma elementelor din tabloul **a**. **(10p.)**

   Exemplu: Dacă pentru **n** se dă valoarea **5**, iar pentru tabloul **x** valorile **(10,8,14,7,5),** subprogramul va calcula: **max=14**, **imax=3**, **sum=44**.

2. Un șir cu maximum 255 de caractere conține cuvinte formate numai din litere mici ale alfabetului englez. Fiecare cuvânt este urmat de un caracter *. Scrieți un program C/C++ care citește un astfel de șir și afișează pe ecran șirul obținut prin eliminarea tuturor cuvintelor din șir care au ca sufix primul cuvânt din șir, ca în exemplu. Un cuvânt **a** este sufix pentru cuvântul **b** dacă există un cuvânt **c** de lungime mai mare sau egală cu 0, astfel încât, prin alipirea cuvântului **a** la sfârșitul cuvântului **c**, se obține cuvântul **b**. **(10p.)**

   Exemplu. Pentru șirul:

   este*soarele*coboara*peste*creste*la*apus*amestecand*norii*

   se va afișa:

   soarele*coboarala*apus*amestecand*norii***

3. Se consideră fișierul **bac.txt** ce conține pe prima linie un număr natural **n** (**10≤n≤** 10^6) și pe a doua linie un șir **descrescător** cu numere naturale de cel mult nouă cifre fiecare, separate prin câte un spațiu.

   a) Să se scrie un program care, folosind un algoritm eficient din punct de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare, citește din fișier toți termenii șirului și afișează toate perechile de termeni distincți alăturați ai șirului dat care au valori mai mici strict decât **n**. Perechile se vor scrie pe ecran, câte cinci perechi pe o linie, separate prin câte un spațiu, iar pe ultima linie se vor scrie atâtea perechi câte mai rămân. **(8p.)**

   Exemplu: Dacă fișierul **bac.txt** are următorul conținut

   334

   2289 22890 22890 356 356 321 321 321 234 234 57 57 57 40 35 32 23 12

   programul va afișa pe ecran:

   (321,234) (234,57) (57,40) (40,35) (35,32)

   (32,23) (23,12)

   b) Descrieți în limbaj natural metoda de rezolvare folosită explicând în ce constă eficiența ei (3-4 rânduri). **(2p.)**

Testul 3

Serenela Răducu [5], *Aurelian Răducu* [6]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre expresiile C/C++ de mai jos este echivalentă cu expresia: `!((a<3)&&(b>9))`? **(4p.)**

   a) `(a>=3)&&(b<=9)`
   b) `!(a<3) || !(b>9)`
   c) `!(a<3) && !(b>9)`
   d) `!(a>=3) && !(b<=9)`

2. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod.

   S-a notat cu **x%y** restul împărțirii numărului natural **x** la numărul natural nenul **y** și cu [**z**] partea întreagă a numărului real **z**.

```
citeste a,b (nr. naturale, a≤b)
k←0
pentru i←a,b executa
|  n←i; c←0
|  cat timp n>0 executa
|  |    daca n%2=1 executa
|  |    |_      c←c+1
|  |_  n←[n/10]
|  daca c>0 atunci
|  |_  k←k+1
|_
scrie k
```

[5] Profesor, Colegiul Național ,,I.C. Brătianu", Pitești, r_sere_gabi@yahoo.com
[6] Profesor, Colegiul Național ,,Al. Odobescu", Pitești, radu_a_d@yahoo.com

a) Scrieţi numărul ce se va afişa dacă pentru **a** se citeşte valoarea **204**, iar pentru **b** se citeşte valoarea **213**. **(6p.)**
b) Dacă pentru variabila **a** se citeşte valoarea **28** scrieţi **toate** valorile care, citite pentru variabila **b**, determină afişarea numărului **3**. **(6p.)**
c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu algoritmul dat în care să se înlocuiască structura repetitivă **pentru...execută** cu o structură repetitivă de un alt tip. **(4p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră o coadă în care inițial au fost introduse, în această ordine, elementele cu valorile **1,2,3,4,5**. Se notează cu **AD(x)** operația prin care se adaugă elementul cu valoarea **x** în coadă și cu **EL** operația prin care se elimină un element din coadă. Câte elemente va conține coada în urma executării secvenței de operații: **AD(8);EL;EL;AD(7);EL;AD(9)**? **(4p.)**
2. Câte grafuri neorientate, distincte, cu **8** vârfuri, se pot construi? Două grafuri se consideră distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite. **(4p.)**
3. Se consideră declararea: **char s[50], x[50];** Ce se afișează în urma executării secvenței de program scrisă alăturat dacă variabila **s** memorează șirul **bacalaureat**? **(6p.)**

```
strcpy(x,s+4);
strcpy(s+4,"123");
strcat(s,x);
cout<<s; | printf("%s", s);
```

4. Ce se va afișa în urma executării secvenței de instrucțiuni alăturate dacă variabila **i** este de tip întreg, iar variabila **s** memorează șirul de caractere **xxyxztxxyyztt**? **(6p.)**

```
i=0;
while (i<strlen(s)-1)
    if (s[i]!=s[i+1])
        strcpy(s+i,s+i+1);
    else
        i=i+1;
cout<<s; | printf("%s", s);
```

5. Scrieți un program **C/C++** care citește de la tastatură două numere naturale nenule **n** și **m** (**2≤m≤10**, **2≤n≤10**) și care construiește în memorie și apoi afișează o matrice **A** cu **n** linii (numerotate de la **1** la **n**) și **m** coloane (numerotate de la **1** la **m**) cu proprietatea că fiecare element $\mathbf{A}_{ij}$ memorează suma dintre valorile indicilor **i** și **j** (**1≤i≤n**, **1≤j≤m**). Matricea se va afișa pe ecran, câte o linie a matricei pe câte o linie a ecranului, elementele fiecărei linii fiind separate prin câte un spațiu. **(10p.)**

Exemplu: Pentru **n=4** și **m=4** se va afișa matricea alăturată.

```
2 3 4 5
3 4 5 6
4 5 6 7
5 6 7 8
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră subprogramul **f** definit alăturat. Ce valoare are **f(5)**? Dar **f(1000)**? **(4p.)**

```
long f(int n)
{
if(n<0) return 0;
else return f(n-4)+n;
}
```

2. Se generează prin metoda backtracking mulțimile distincte ale căror elemente sunt numere naturale nenule și care au proprietatea că suma elementelor fiecărei mulțimi este egală cu **7**. Astfel, sunt generate, în această ordine, mulțimile: **{1,2,4}**, **{1,6}**, **{2,5}**, **{3,4}**, **{7}**. Folosind aceeași metodă pentru a genera mulțimile distincte ale căror elemente sunt numere naturale nenule și care au proprietatea că suma elementelor fiecărei mulțimi este egală cu 9, stabiliți în ce ordine sunt generate următoarele mulțimi: **M1={2,3,4}**; **M2={3,6}**; **M3={2,7}**; **M4={4,5}**. **(6p.)**
3. Se consideră subprogramul **cifre**, care primește prin intermediul primului parametru, **a**, un număr natural cu maximum **8** cifre nenule și returnează, prin intermediul celui de-al doilea parametrul **b**, cel mai mic număr care se poate forma cu toate cifrele distincte ale lui **a**. Scrieți definiția completă a subprogramului **cifre**. **(10p.)**
4. Fișierul text **date.in** conține pe prima linie un număr natural nenul **n (n≤100)**, iar pe a doua linie **n** numere naturale nenule, separate prin câte un spațiu, fiecare număr având maximum **4** cifre. Scrieți un program C/C++ care citește toate numerele din fișierul text **date.in**, construiește în memorie un tablou unidimensional **a**, cu cele **n** elemente din fișier și afișează pe ecran perechile ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_j$), **1≤i<j≤n**, cu proprietatea că elementele fiecăreia dintre aceste perechi au paritate diferită. Fiecare pereche se va afișa pe câte o linie a ecranului, elementele perechii fiind separate prin câte un spațiu. În cazul în care nu există nicio pereche, se va afișa valoarea **0**. **(10p.)**

   Exemplu: Dacă fișierul **date.in** are conținutul

   5

   16 22 3 6 1

   se vor afișa:

   16 3

   16 1

   22 3

   22 1

   3 6

   6 1

Testul 4

Serenela Răducu [7], *Aurelian Răducu* [8]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (30 de puncte)

Pentru itemul 1 scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie expresia `NOT((a<3)AND(b>9))`. Care dintre expresiile PASCAL de mai jos este echivalentă? **(4p.)**

[7] Profesor, Colegiul Național ,,I.C.Brătianu" Pitești, r_sere_gabi@yahoo.com
[8] Profesor, Colegiul Național ,,Al. Odobescu" Pitești, radu_a_d@yahoo.com

a) `(a>=3)AND(b<=9)`
b) `NOT(a<3) OR NOT (b>9)`
c) `NOT(a<3) AND NOT(b>9)`
d) `NOT(a>=3) AND NOT(b<=9)`

2. Se consideră algoritmul alăturat, descris în pseudocod.

   S-a notat cu **x%y** restul împărțirii numărului natural **x** la numărul natural nenul **y** și cu **[z]** partea întreagă a numărului real **z**.

```
citeste a,b (nr. naturale, a≤b)
k←0
pentru i←a,b executa
|  n←i; c←0
|  cat timp n←0 executa
|  |    daca n%2=1 executa
|  |    |_      c←c+1
|  |_  n←[n/10]
|  daca c>0 atunci
|  |_  k←k+1
|_
scrie k
```

a) Scrieţi numărul ce se va afişa dacă pentru **a** se citeşte valoarea **204**, iar pentru **b** se citeşte valoarea **213**. **(6p.)**
b) Dacă pentru variabila **a** se citeşte valoarea **28** scrieţi **toate** valorile care, citite pentru variabila **b**, determină afişarea numărului **3**. **(6p.)**
c) Scrieţi programul PASCAL corespunzător algoritmului dat. **(4p.)**
d) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu algoritmul dat în care să se înlocuiască structura repetitivă **pentru...execută** cu o structură repetitivă de un alt tip. **(10p.)**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră o coadă în care inițial au fost introduse, în această ordine, elementele cu valorile **1, 2, 3, 4, 5** . Se notează cu **AD(x)** operația prin care se adaugă elementul cu valoarea **x** în coadă și cu **EL** operația prin care se elimină un element din coadă. Câte elemente va conține coada în urma executării secvenței de operații: **AD(8);EL;EL;AD(7);EL;AD(9)**?**(4p.)**
2. Câte grafuri neorientate, distincte, cu **8** vârfuri, se pot construi? Două grafuri se consideră distincte dacă matricele lor de adiacență sunt diferite. **(4p.)**
3. Se consideră declararea: **var s,x:string[50];** Ce se afișează în urma executării secvenței de program scrisă alăturat dacă variabila **s** memorează șirul **bacalaureat**? **(6p.)**

```
x:=copy(s,5,3);
delete(s,5,3);
s:=s+'123'+x;
write(s);
```

4. Ce se va afișa în urma executării secvenței de instrucțiuni alăturate dacă variabila **i** este de tip întreg, iar variabila **s** memorează șirul de caractere **xxyxztxxyyztt**? **(6p.)**

```
i:=1;
while i<length(s) do
    if s[i]!<>s[i+1] then
        delete(s,i,1)
    else
        i:=i+1;
write(s);
```

5. Scrieți un program PASCAL care citește de la tastatură două numere naturale nenule **n** și **m** (**2≤m≤10**, **2≤n≤10**) și care construiește în memorie și apoi afișează o matrice **A** cu **n** linii (numerotate de la **1** la **n**) și **m** coloane (numerotate de la **1** la **m**) cu proprietatea

că fiecare element $\mathbf{A}_{ij}$ memorează suma dintre valorile indicilor **i** și **j** (**1≤i≤n**, **1≤j≤m**). Matricea se va afișa pe ecran, câte o linie a matricei pe câte o linie a ecranului, elementele fiecărei linii fiind separate prin câte un spațiu. **(10p.)**

Exemplu: Pentru **n=4** și **m=4** se va afișa matricea alăturată.

```
2 3 4 5
3 4 5 6
4 5 6 7
5 6 7 8
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră subprogramul **f** definit alăturat. Ce valoare are **f(5)**? Dar **f(1000)**? **(4p.)**

```
function f(n:integer):longint;
begin
if n<0 then f:=0
else f:= f(n-4)+n;
end;
```

2. Se generează prin metoda backtracking mulțimile distincte ale căror elemente sunt numere naturale nenule și care au proprietatea că suma elementelor fiecărei mulțimi este egală cu **7**. Astfel, sunt generate, în această ordine, mulțimile: **{1,2,4}**, **{1,6}**, **{2,5}**, **{3,4}**, **{7}**. Folosind aceeași metodă pentru a genera mulțimile distincte ale căror elemente sunt numere naturale nenule și care au proprietatea că suma elementelor fiecărei mulțimi este egală cu 9, stabiliți în ce ordine sunt generate următoarele mulțimi: **M1={2,3,4}**; **M2={3,6}**; **M3={2,7}**; **M4={4,5}**. **(6p.)**
3. Se consideră subprogramul **cifre**, care primește prin intermediul primului parametru, **a**, un număr natural cu maximum **8** cifre nenule și returnează, prin intermediul celui de-al doilea parametrul **b**, cel mai mic număr care se poate forma cu toate cifrele distincte ale lui **a**. Scrieți definiția completă a subprogramului **cifre**. **(10p.)**
4. Fișierul text **date.in** conține pe prima linie un număr natural nenul **n** (**n≤100**), iar pe a doua linie **n** numere naturale nenule, separate prin câte un spațiu, fiecare număr având maximum **4** cifre. Scrieți un program PASCAL care citește toate numerele din fișierul text **date.in**, construiește în memorie un tablou unidimensional **a**, cu cele **n** elemente din fișier și afișează pe ecran perechile ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_j$), **1≤i<j≤n**, cu proprietatea că elementele fiecăreia dintre aceste perechi au paritate diferită. Fiecare pereche se va afișa pe câte o linie a ecranului, elementele perechii fiind separate prin câte un spațiu. În cazul în care nu există nicio pereche, se va afișa valoarea **0**. **(10p.)**

   Exemplu: Dacă fișierul **date.in** are conținutul

   5

   16 22 3 6 1

   atunci se vor afișa:

   16 3

   16 1

   22 3

   22 1

   3 6

   6 1

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Viorel Păun [1]

1. Fie m și n două numere naturale, $2 \leq m, n < 2^{15}$.
   a) Demonstrați că suma resturilor împărțirii numărului m^n la numerele $1, 2, \ldots, n$ este mai mică decât $\dfrac{n^2}{2}$.
   b) Elaborați un program C++ pentru calculul sumei resturilor împărțirii numărului m^n la $1, 2, \ldots, n$.
   c) Elaborați o funcție C++ de complexitate $O(\log_2 n)$ pentru calculul restului împărțirii numărului m^n la k.
2. Fie polinomul $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 1000$, cu coeficienți în corpul $\mathbb{Z}_p$ al claselor de resturi modulo p, unde p este un număr prim. Elaborați un program C++ pentru:
   a) reducerea gradului polinomului $P(x)$, utilizând relația $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$;
   b) rezolvarea ecuației polinomiale $P(x) = 0$.

Testul 2

Costel Bălcău [2]

1. Se dau un număr natural n având k cifre și un număr $m \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Elaborați un program C++ care să determine:
   a) numărul maxim p ce se obține din n prin eliminarea unei singure cifre;
   b) numărul maxim q ce se obține din n prin eliminarea a m cifre.

   Exemplu. Pentru $n = 97478461$ și $m = 4$, răspunsul la punctul a) este $p = 9778461$, iar răspunsul la punctul b) este $q = 9861$.
2. Fie n un număr natural nenul.
   a) Elaborați un program C++ pentru generarea tuturor partițiilor mulțimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ în două submulțimi de cardinale egale (submulțimile sunt disjuncte, reuniunea lor este M și nu contează ordinea dintre ele).
   b) Elaborați un program C++ pentru determinarea numărului de partiții de la punctul a).

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, viop23@yahoo.com
[2] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a V-a

M 41. Pe o tablă sunt scrise 10 numere naturale diferite, toate puteri ale lui 2. Nouă elevi ai clasei a V-a ies pe rând la tablă, aleg două numere pe care le șterg, iar în locul lor scriu suma acestora.

a) Dacă numărul scris de ultimul elev este 1023, se pot determina cele 10 numere scrise inițial pe tablă?

b) Dacă cele 10 numere sunt puteri pare consecutive nenule ale lui 2, să se determine ultima cifră a numărului care rămâne scris ultimul pe tablă.

Mihai Burdușa, Pitești

M 42. Fie $\overline{abcd}$ număr natural cu $a > b > c > d > 0$ și $N = \overline{abcd} - \overline{dcba}$.

a) Determinați valoarea maximă a lui N.

b) Determinați valorile numărului $\overline{abcd}$ pentru care $N = 3087$.

Adrian Țurcanu, România și *Talal Shaikh*, India

M 43. Arătați că oricare ar fi cifrele nenule x, y în baza 10 și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, numărul

$$N = \underbrace{\overline{xyxy\ldots xy}}_{n \text{ de } \overline{xy}} + \underbrace{\overline{yxyx\ldots yx}}_{n \text{ de } \overline{yx}}$$

nu este pătrat perfect.

Marian Haiducu, Pitești

M 44. Numărul $\overline{abba}$ dă prin împărțire la $\overline{ac}$ câtul $\overline{aa0}$ și restul $\overline{aa}$.

a) Arătați că a divide b.

b) Aflați numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea din enunț.

Mugurel Simion, Ștefănești

M 45. Determinați numărul $\overline{abc}$ știind că $\overline{ac} \cdot b = \overline{bc} \cdot a + 1$.

Florin Antohe, Galați și *Marius Antonescu*, Coșești

Clasa a VI-a

M 46. În jurul punctului O sunt formate 15 unghiuri $\sphericalangle A_1OA_2$, $\sphericalangle A_2OA_3$,...,$\sphericalangle A_{15}OA_1$, cu măsurile în grade exprimate prin numere naturale divizibile cu 3 astfel încât

$$\sphericalangle A_1OA_2 < \sphericalangle A_2OA_3 < \ldots < \sphericalangle A_{15}OA_1.$$

a) Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_1OA_{15}$ și $\sphericalangle A_7OA_8$.

b) Câte unghiuri $\sphericalangle A_iOA_j$ cu $i, j \in \{1, 2, ..., 15\}$ sunt unghiuri drepte?

Mihai Burdușa, Pitești

M 47. a) Există trei numere naturale nenule diferite a, b, c cu proprietățile: $a^2 \in M_b \cap M_c$, $b^2 \in M_a \cap M_c$ și $c^2 \in M_a \cap M_b$?

b) Există trei numere naturale nenule diferite a, b, c cu proprietățile: $a^2 + 1 \in M_b \cap M_c$, $b^2 + 1 \in M_a \cap M_c$ și $c^2 + 1 \in M_a \cap M_b$?

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

M 48. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere raționale pozitive astfel încât numerele $k + x_k$ sunt direct proporționale cu numerele $2k + x_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{2}{2+x_2} + ... + \frac{n}{n+x_n} = \frac{n}{2n+1}.$$

Arătați că $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n+1}$ este număr natural pătrat perfect.

Cristian Grecu, Târgoviște

M 49. Arătați că dacă $A \cup B \cup C$ are 2017 elemente, unde A, B, C sunt trei mulțimi cu același cardinal cu proprietatea că $A \cap B$, $A \cap C$ și $B \cap C$ au cardinalele exprimate prin trei numere naturale consecutive, atunci intersecția celor trei mulțimi este nevidă.

Marian Haiducu, Pitești

M 50. Pe o tablă sunt desenate triunghiuri și pătrate, fără puncte comune, în total 2019 figuri geometrice. Un elev șterge câte o latură de la fiecare pătrat și câte o latură de la fiecare triunghi. Spunem despre un vârf al unei figuri geometrice că are *gradul* k, dacă face parte din k laturi distincte ale figurii geometrice respective. Știind că, după ștergerea muchiilor, pe tablă sunt 3018 puncte de gradul 2, determinați numărul de triunghiuri desenate inițial pe tablă.

Adrian Țurcanu, Pitești

Clasa a VII-a

M 51. Arătați că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$4+\frac{r}{R}\leq\frac{3a^n}{b^n+c^n}+\frac{3b^n}{c^n+a^n}+\frac{3c^n}{a^n+b^n},$$

unde $n\in\mathbb{N}$.

Alexandru Szőrös, Timișoara

M 52. Arătați că toate numerele naturale nenule x,y,z care verifică egalitatea

$$\frac{x+1}{x}\times\frac{y+1}{y}=\frac{z+1}{z},$$

sunt de forma

$$(x,y,z)=\left(da\cdot\frac{d^2ab+dbt+1}{t},db(da+t),d^2ab\right),$$

unde a,b,d,t sunt numere naturale nenule astfel încât $t|d^2ab+1$ și $(a,b)=1$.

Amir Hossein Parvardi, Canada

M 53. Arătați că există două numere prime răsturnate p și q care verifică egalitatea:

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}-\sqrt{p-\sqrt{q}}=\sqrt{2}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

M 54. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A)=80^\circ$, $m(\sphericalangle C)=140^\circ$ și $AB=AD=a$ cm. Calculați AC.

Costel Anghel, Slatina și *Florea Badea*, Scornicești

M 55. Fie $a,b\geq 0$ astfel încât $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$. Demonstrați că $\sqrt{5a+4b}+\sqrt{5b+4a}\geq 3$. Când are loc egalitatea?

Ovidiu Pop, Satu Mare

Clasa a VIII-a

M 56. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a+b+c=-2$ și $a^2+b^2+c^2=4$. Calculați diferența dintre cea mai mare valoare și cea mai mică valoare posibile pentru c.

Marin Chirciu, Pitești

M 57. Arătați că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$, atunci:

$$a\sqrt{1+\frac{1}{a}}+b\sqrt{1+\frac{1}{b}}+c\sqrt{1+\frac{1}{c}}\leq\frac{9+a+b+c}{2\sqrt{2}}.$$

Cristian Grecu, Târgoviște

M 58. Dacă $x, y>0$, $\frac{7x}{2}-2y-1\geq 0$ și $\frac{7y}{2}-2x-1\geq 0$, demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{7x}{2}-2y-1}+\sqrt{\frac{7y}{2}-2x-1}\leq\sqrt{x+y}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

M 59. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 0$. Arătați că:

$$\left(1+\frac{a^3}{b^3}\right)^4+\left(1+\frac{b^3}{c^3}\right)^4+\left(1+\frac{c^3}{a^3}\right)^4>15.$$

Alexandru Szőrös, Timișoara

M 60. Fie $VA_1A_2\ldots A_n$ o piramidă regulată ($n\geq 3$) de vârf V și bază poligonul regulat $A_1A_2\ldots A_n$. Măsurile unghiurilor de la vârfurile fețelor laterale sunt egale cu 60°.

a) Arătați că $n\leq 5$.

b) Dacă un plan α intersectează muchiile $VA_1, VA_2, \ldots, VA_n$ în punctele $M_1, M_2, \ldots,$ respectiv M_n, $3\leq n\leq 5$, atunci

$$P_{M_1M_2\ldots M_n}\geq VM_1+VM_2+\ldots+VM_n.$$

Marian Haiducu, Pitești

Clasa a IX-a

M 61. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < 2x < 3y < 4z$. Demonstrați inegalitatea

$$2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\geq 3.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

M 62. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și $x_{n+1} = 2^{x_n} - x_{n-1}$, pentru $n \geq 2$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și că $x_n \geq n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

M 63. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați numerele reale $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ astfel încât

$$\prod_{i=0}^{2n-1}\left(\sum_{k=i}^{i+n-1} x_{k \bmod 2n}^2+\frac{4n-1}{4n}\right)=\sum_{k=0}^{2n-1} x_k$$

($k \bmod 2n$ reprezintă restul împărțirii lui k la $2n$).

Daniel Jinga și *Costel Bălcău*, Pitești

M 64. Fie ABC un triunghi și fie punctele D și E astfel încât $B \in (CD)$, $C \in (BE)$ și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$. Arătați că

$$\frac{AB \cdot AD}{BD}=\frac{AC \cdot AE}{CE}.$$

Dao Thanh Oai, Vietnam și *Leonard Giugiuc*, România

M 65. Fie ABC un triunghi echilateral, P un punct situat pe segmentul (BC) și Q un punct situat pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ al cercului circumscris triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle APC \equiv \sphericalangle QPB$. Arătați că

$$\sqrt{\frac{PC}{PB}}-\frac{QA}{QB}=1.$$

Thanos Kalogerakis, Grecia

Clasa a X-a

M 66. Un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ are proprietățile:

i) $a_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

ii) șirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Arătați că șirul $\left(\log_{a_n} a_{n+1}\right)_{n\geq 0}$ este, de asemenea, descrescător.

Andrei Vernescu, București

M 67. Fie $a, b, c \geq 0$ și $k > 0$. Notăm $s = a^k + b^k + c^k$. Demonstrați că

$$\frac{a^k}{k + b^{k+1}} + \frac{b^k}{k + c^{k+1}} + \frac{c^k}{k + a^{k+1}} \geq \frac{3s(k+1) - s^2}{3k(k+1)}.$$

Marin Ionescu, Pitești

M 68. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte două câte două astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și

$$|z_1 - z_2|(z_1 + z_2) + |z_2 - z_3|(z_2 + z_3) + |z_3 - z_1|(z_3 + z_1) = 0.$$

Arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Daniel Jinga, Pitești

M 69. Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} (x+y)^7 = x^7 + y^7 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Alexandru Szőrös, Timișoara

M 70. Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq p + \sqrt{3r(4R + r)}.$$

Marian Cucoaneș, Mărășești și *Marius Drăgan*, București

Clasa a XI-a

M 71. a) Dați exemplu de două matrice de forma $X = \begin{pmatrix} 13a & b \\ b & 10a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $\det(X) = 1$.

b) Arătați că există o infinitate de matrice cu proprietatea de la punctul a).

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 72. Arătați că dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relațiile $A^2B = ABA$, $\det(A+B) = \det(B) \neq 0$ și $\text{tr}\,(AB) \neq 0$, atunci $AB = BA$.

Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la ipoteza $\det(B) \neq 0$?

Dar dacă se renunță la ipoteza $\text{tr}\,(AB) \neq 0$?

Florin Stănescu, Găești

M 73. Fie șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3x_n + nx_n^3) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n = \dfrac{n^4x_n}{2n+1}$ este convergent și calculați limita sa.

Dinu Teodorescu, Târgoviște

M 74. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$x_1 = 0,\ y_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{ax_n + by_n}{a+b},\ y_{n+1} = \frac{cx_n + dy_n}{c+d},\ \forall n \geq 1.$$

Arătați că șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, au aceeași limită și calculați această limită.

Marin Chirciu, Pitești

M 75. Fie $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ două funcții continue, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir cu $a_n \in [a, b]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$|f(a_m) - g(a_n)| \leq |a_m - a_n|\,,$$

pentru orice $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Arătați că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.

Cristinel Mortici, Târgoviște

Clasa a XII-a

M 76. Demonstrați că există o infinitate de numere întregi n cu proprietatea că pentru orice număr întreg k, numărul $n^3 + 3kn^2 + n + 3k$ este divizibil cu 2019.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 77. Fie M mulțimea tuturor tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pentru care $a \geq 1 \geq b \geq c$, $a+b+c < 0$ și $ab + ac + bc = 3$.

a) Arătați că pentru orice $(a, b, c) \in M$ există un unic $t \in [1, \infty)$ astfel încât

$$a + b + c = -\frac{3\left(t^2 + 1\right)}{2t}.$$

b) Calculați $\max\{a + b + c \mid (a, b, c) \in M\}$.

Leonard Giugiuc și *Diana Trăilescu*, Drobeta Turnu Severin

M 78. Calculați $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^2 + x^6}}{1 - x^4}\, dx$, $x \in (0, 1)$.

Daniel Jinga, Pitești

M 79. Calculați integrala $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \left(1 + \sin 2x + e^{2x}\right)}{e^{2x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

M 80. Un șir de numere reale pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și are proprietatea

$$(n + 2)a_{n+2} + (n + 1)a_{n+1} + na_n = \frac{1}{n + 1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$.

c) Dați un exemplu de șir cu proprietatea din enunț.

Andrei Vernescu, București

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 16 (**numere**). Tică și Ionică sunt buni prieteni, pasionați de matematică și de informatică. Aceștia participă la un concurs de propunători de probleme pe echipe. Pentru a avea succes Tică vrea să propună o problemă cu șiruri, iar Ionică o problemă cu numere libere de pătrate. Numerele libere de pătrate sunt cele care se pot scrie ca un produs de numere prime distincte. Au decis să participe la concurs cu o problemă care folosește un șir și numere libere de pătrate. În această problemă se dă un șir de N numere naturale nenule. Cerința problemei este determinarea numărului de numere libere de pătrate, notat cu A și lungimea maximă a unei secvențe din șir formată numai din numere care nu sunt libere de pătrate, notată cu B.

Cerință

Știind N și termenii șirului, să se determine numărul de numere libere de pătrate și lungimea maximă a unei secvențe din șir formată numai din numere care nu sunt libere de pătrate.

Date de intrare

Din fișierul `numere.in` se citesc: numărul cerinței, notat cu k, de pe prima linie, numărul natural N de pe a doua linie și cei N termeni ai șirului de pe linia următoare, separați prin câte un spațiu.

Date de ieșire

În fișierul `numere.out` se va scrie numărul A, dacă $k = 1$ și respectiv numărul B, dacă $k = 2$, cu semnificația din enunț.

Restricții și precizări

- $1 < N \leq 25000$, număr natural
- Termenii șirului sunt numere naturale nenule mai mici sau egale cu 1000000000
- Dacă toate numerele din șir sunt libere de pătrate perfecte, atunci $B = 0$
- Pentru prima cerință se primește 50% din punctaj
- Secvența este o succesiune de elemente aflate pe poziții consecutive

Exemple

`numere.in`	`numere.out`	Explicație

`1`
`4`
`6 18 7 14`
	`3`	$k = 1$ și deci afișăm A.
		Numerele libere de pătrate sunt 6, 7 și 14.

`2`
`4`
`6 18 7 14`
	`1`	$k = 2$ și deci afișăm B.
		Secvența cu număr maxim de numere care nu sunt libere de pătrate este formată doar din 18.

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2018)

I 17 (**sircif**). Tică și Ionică sunt buni prieteni, pasionați de matematică și de informatică. Aceștia participă la un concurs de propunători de probleme pe echipe. Pentru a avea succes Tică vrea să propună o problemă cu șiruri, iar Ionică o problemă cu produse. După consultări repetate se decid să participe la concurs cu o problemă care folosește atât șiruri cât și produse. În această problemă se dau N șiruri de cifre nenule, care se termină cu 0 – lucru specificat de Tică. Ionică propune să se determine pentru fiecare șir și produsul termenilor și astfel se obține un alt șir notat cu $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$. Cerința problemei este determinarea numărului de numere pare și a numărului de componente distincte din șirul p.

Cerință

Se cunosc cele N șiruri și se cere să se determine numărul de numere pare din șirul p, notat cu A și numărul de componente distincte din șirul p, notat cu B.

Date de intrare

Din fișierul `sircif.in` se citesc: numărul cerinței notat cu k, de pe prima linie, numărul natural N de pe a doua linie și celelalte N șiruri, fiecare pe câte o linie încheiate cu 0 (care nu face parte din șir).

Date de ieșire

În fișierul `sircif.out` se va scrie numărul A, dacă $k = 1$ și respectiv numărul B, dacă $k = 2$, cu semnificația din enunț.

Restricții și precizări

- $1 < N \leq 1000$, număr natural
- Fiecare șir are cel mult 1000 de cifre
- Pentru prima cerință se primește 50% din punctaj

Exemple

`sircif.in`	`sircif.out`	Explicație

`1`
`3`
`7 5 0`
`1 3 9 2 1 0`
`2 3 3 3 0`
	`2`	$k = 1$ și deci afișăm A.
		Produsul termenilor primului șir este $p_1 = 35$.
		Produsul termenilor celui de-al doilea șir este $p_2 = 54$.
		Produsul termenilor celui de-al treilea șir este $p_3 = 54$.
		Șirul p are doi termeni pari.

`1`
`3`
`7 5 0`
`1 3 9 2 1 0`
`2 3 3 3 0`
	`2`	$k = 2$ și deci afișăm A.
		Produsul termenilor primului șir este $p_1 = 35$.
		Produsul termenilor celui de-al doilea șir este $p_2 = 54$.
		Produsul termenilor celui de-al treilea șir este $p_3 = 54$.
		Șirul p are două componente distincte $(35, 54)$.

Timp maxim de execuție: 1.5 secunde/test.

Memorie disponibilă: 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Micul Gates, 2018)

I 18 (**secventa**). Se dă un șir de numere naturale $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ și dorim să determinăm secvențe de lungime maximă formate numai din numere prime.

Cerință

Se cunosc N și numerele $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ și se cere să se determine lungimea maximă a unei secvențe formată numai din numere prime, notată cu A și numărul de astfel de secvențe din șirul p, notat cu B.

Date de intrare

Din fișierul `secventa.in` se citesc: numărul natural N de pe prima linie și cele N numere din șirul p, pe a doua linie, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

În fișierul `secventa.out` se vor scrie numărele A și B separate printr-un spațiu.

Restricții și precizări

- $1 < N \leq 100000$, număr natural
- Termenii șirului sunt numere naturale cu maxim 9 cifre
- Secvența este un o porțiune din p cu indici consecutivi

Exemplu

`secventa.in`	`secventa.out`	Explicație
`10` `2 5 11 8 7 4 3 19 17 4`	`3 2`	Secvențele de numere prime sunt: 2 5 11, 7, 3 19 17. Secvențele 2 5 11, 3 19 17 sunt de lungime maximă.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Violeta Bălan, Slatina

I 19 (bireactive). Când a ajuns acasă, Gigel a găsit pe o foaie n numere $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, fiecare reprezentând o substanță chimică. El știe de la chimie că două substanțe chimice A și B alăturate reacționează dacă îndeplinesc următoarea condiție $0 \leq |A - B| \leq 10$ ($|a| =$ modul de a) și rezultă o singură substanță, egală cu:

1. $A + B$, dacă $0 \leq |A - B| \leq 5$;
2. $2(A + B)$, dacă $5 < |A - B| \leq 10$.

El a observat că unele substanțe pot reacționa și cu substanța din stânga și cu substanța din dreapta și le-a numit ,,bi-reactive".

Cerință

1. Câte substanțe bi-reactive sunt?
2. Care este substanța care apare de cele mai multe ori? (dacă două substanțe apar de un număr maxim de ori, se va afișa prima găsită).
3. Care ar fi numărul maxim de substanțe bi-reactive dacă s-ar elimina o substanță oarecare de pe foaie?
4. Determinați substanțele rezultate după ce toate substanțele au reacționat, astfel încât:

   - substanța reacționează doar cu cea din dreapta ei;
   - după fiecare reacție se caută de la stânga la dreapta prima substanță care poate reacționa;
   - procesul se repetă până când nu mai există două substanțe vecine care pot reacționa.

Date de intrare

Din fișierul `bireactive.in` se citesc: de pe prima linie numărul natural n, iar de pe a doua linie numerele naturale $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Date de ieșire

În fișierul `bireactive.out` se vor scrie răspunsurile corespunzătoare punctelor a, b, c, d, pe câte o linie.

Restricții și precizări

- $5 \leq n \leq 100$
- $1 \leq C_k \leq 500$, unde $1 \leq k \leq n$
- Toate substanțele rezultate în urma reacțiilor nu vor depăși 400000
- În cazul în care nu se rezolvă un punct al problemei, se va afișa un număr oarecare pe linia corespunzătoare

Exemplu

bireactive.in	bireactive.out
7 1 5 2 5 20 60 256	2 5 2 508

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Eustațiu Dima, Corabia

I 20 (h). De 1 iunie școlile dintr-un oraș participă la o paradă. Una dintre școlile participante, trebuie să împartă elevii săi în două grupuri. Toți elevii școlii sunt îmbrăcați în tricouri pe care sunt scrise numere natrale, în funcție de înălțimea elevului (cu cât elevul este mai înalt cu atât are un număr mai mare). Nu există doi elevi care să aibă scris pe tricourile lor același număr, iar numere folosite sunt $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Pentru ca să se formeze două grupuri, cât mai echilibrate din punct de vedere al înălțimii, se dorește ca suma numerelor de pe tricourile elevilor care fac parte din primul grup să fie egală cu cea din al doilea grup.

Cerință

Să se scrie un program care să determine elevii primului grup (numerele de pe tricourile lor în ordine *crescătoare*) cu condiția de mai sus.

Date de intrare

Fișierul de intrare `h.in` are pe prima linie numărul n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `h.out` va conține pe prima linie numerele cerute, separate între ele prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $0 < n < 10001$

Exemplu

h.in	h.out	Explicație
2	5 6 7	5+6+7=1+2+3+4+8. Se putea afișa și 1 2 3 4 8 sau altă soluție corectă.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasa a X-a

I 21 (**operatii**). Fiind date două tablouri bidimensionale a și b, cu m linii și n coloane fiecare, definim următoarele operații:

1. suma tablourilor a și b, ca fiind un tablou c cu m linii și n coloane, în care fiecare element este egal cu suma elementelor de pe aceeași linie și aceeași coloană din a și b. În acest caz folosim operatorul $+$, adică $c = a + b$.
2. produsul tablourilor a și b, ca fiind un tablou d cu m linii și n coloane, în care fiecare element este egal cu produsul elementelor de pe aceeași linie și aceeași coloană din a și b. În acest caz folosim operatorul $*$, adică $d = a * b$. Dacă a și b sunt tablouri identice (a și b au elemente identice pe aceeași poziție), atunci pentru d se folosește și notația a^2 sau b^2.

Exemplu

Pentru $m = 2$, $n = 3$ și tablourile

a

1	5	7
2	15	3

b

2	10	100
1	8	0

se obține

$a + b$

3	15	107
3	23	3

$a * b$

2	50	700
2	120	0

a^2

1	25	49
4	225	9

b^2

4	100	10000
1	64	0

Fiind dat un tablou bidimensional a, cu m linii, n coloane și componente numere naturale dorim să determinăm un șir de tablouri bidimensionale $b_1, b_2, \ldots, b_k$ cu număr minim de termeni (k minim), cu proprietatea că $a = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$.

Cerință

Să se determine tablourile bidimensionale $b_1, b_2, \ldots, b_k$ cu proprietatea din enunț.

Date de intrare

Fișierul de intrare `operatii.in` conține pe prima linie numerele naturale m și n separate prin câte un spațiu. Pe umătoarele m linii se află elementele tabloului a, câte n numere pe o linie, în cadrul unei linii numerele fiind separate între ele prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `operatii.out` conține pe prima linie un număr natural reprezentând valoarea k, apoi pe următoarele $k \cdot m$ linii elementele celor k tablouri $b_1, b_2, ..., b_k$. Fiecare dintre aceste tablouri va fi scris pe câte m linii consecutive, iar pe fiecare dintre aceste linii se vor afla câte n numere separate prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $1 \leq m, n \leq 200$
- Componentele tabloului a sunt numere naturale ≤ 10000
- Pot exista mai multe soluții, dar în fișierul de ieșire se va scrie una dintre ele
- 30% din teste au componentele tabloului a mai mici sau cel mult egale cu 100 și $m, n \leq 100$
- 60% din teste au componentele tabloului a mai mici sau cel mult egale cu 1000

Exemplu

operatii.in	operatii.out	Explicație
2 3 1 2 4 5 5 9	2 1 1 0 2 2 3 0 1 2 1 1 0	a este: 1 2 4 5 5 9 b_1 este: 1 1 0 iar b_1^2 este: 1 1 0 2 2 3 4 4 9 b_2 este: 0 1 2 iar b_2^2 este: 0 1 4 1 1 0 1 1 0 Se observă că $b_1^2 + b_2^2 = a$.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 16 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (Lot juniori 2009)

I 22 (varf). Se dă o secvență de maxim 1000 de caractere (numai litere mici ale alfabetului englez). Prin *vârf* se înțelege o succesiune de caractere $x_1x_2 \ldots x_{2k-1}$ cu proprietatea $x_1 < x_2 < \cdots < x_k > x_{k+1} > \ldots x_{2k} > x_{2k-1}$, relația de ordine fiind cea alfabetică, iar numărul k reprezintă *înălțimea* vârfului.

Cerință

Se cere să se determine înățimea celui mai înalt vârf din secvența de caractere.

Date de intrare

În fișierul `varf.in` se dă, pe o singură linie, secvența de caractere.

Date de ieșire

Fișierul `varf.out` va conține înălțimea celui mai înalt vârf.

Restricții și precizări

- Secvența din fișier are maxim 1000 de caractere și cel puțin un caracter

Exemplu

varf.in	varf.out	Explicație
abcdbabefdcbax	4	Înălțimea maximă este 4, pentru că succesiunea de caractere abefdcb este un vârf. Alt vârf mai înalt nu există.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 23 (char). Alex a primit de la Moș Crăciun un joc foarte interesant. Jocul este format dintr-o secvență de n litere mici. Fiecare literă are o anumită putere, dată printr-un număr natural. Puterea k a unei litere c constă în faptul că, dacă aceasta este atinsă, toate literele din secvențele de câte k litere din stânga și din dreapta sa se transformă în c. Spre exemplu, dacă litera n are puterea 2, atunci după atingere secvența abcbnpbrr se transformă în abnnnnnrr. Cunoscând puterea fiecărei litere, jocul constă în determinarea numărului maxim m de litere care după atingere să transforme orice literă din secvență cel mult o dată.

Cerință

Să se scrie un program care să citească o secvență cu n litere, puterea fiecărei litere din secvență și să afișeze numărul de litere cu puterea maximă și numărul m.

Date de intrare

În fișierul `char.in` se dau:

- pe prima linie numărul n;

- pe a doua linie n litere, fără spațiu între ele;

- pe a treia linie numărul h de litere distincte din secvență;

- pe a patra linie h numere naturale, separate între ele prin câte un spațiu, reprezentând puterea literelor din secvență, în ordine alfabetică.

Date de ieșire

Fișierul `char.out` va conține pe prima linie numărul de litere cu puterea maximă, iar pe linia a doua numărul m.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10000$
- $1 \leq$ putere literă ≤ 100
- Dacă în stânga sau în dreapta unei litere sunt mai puține litere decât puterea, atunci atingerea conduce la transformarea tuturor literelor din stânga, respectiv din dreapta
- Se acordă 30% din punctaj pentru determinarea numărului de litere cu puterea maximă și 70% din punctaj pentru determinarea numărului m

Exemplu

`char.in`	`char.out`	Explicație

`12`
`acbbxacbbbxb`
`4`
`2 5 3 2`
	`6`
	`3`
		Litera a are puterea 2, litera b puterea 5, litera c puterea 3, respectiv litera x puterea 2.
		Litera cu puterea maximă este b, care apare de șase ori.
		Numărul maxim de litere care pot fi atinse astfel încât în secvență să se transforme orice literă cel mult o dată este 3 (de exemplu se pot atinge literele de pe pozițiile 1, 6, 11, pozițiile începând cu indicele 1).

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 24 (**ec**). Alexandru are la dispoziție un tablou pătratic de dimensiune n cu numere întregi și k ecuații de tipul I și II. Ecuațiile de tipul I sunt de forma $ax + b = c$, cu a, b, c numere naturale, iar ecuațiile de tipul II sunt de forma: $ax^2 + bx + c = d$, cu a, b, c, d numere naturale.

Alexandru își propune să determine pentru fiecare tip de ecuație numărul lor și câte dintre ele au rădăcinile în tabloul dat.

Cerință

Să se scrie un program care determină numărul de ecuații de tipul I, câte dintre acestea au exact o rădăcină în tablou, respectiv numărul de ecuații de tipul II și câte dintre acestea au ambele rădăcini în tablou.

Date de intrare

Fișierul de intrare `ec.in` va conține: pe prima linie numerele naturale n și k separate printr-un spațiu, pe următoarele n linii elementele tabloului separate prin câte un spațiu, iar pe următoarele k linii ecuațiile în forma din enunț, câte una pe fiecare linie.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `ec.out` va conține pe prima linie două numere separate printr-un spațiu reprezentând numărul de ecuații de tipul I, respectiv numărul de ecuații de tipul I care au exact o rădăcină, aflată în tablou, iar pe a doua linie tot două numere separate printr-un spațiu reprezentând numărul de ecuații de tipul II, respectiv numărul de ecuații de tipul II cu exact două rădăcini (posibil egale), ambele rădăcini în tablou.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 500$
- $1 \leq k \leq 1000$
- Elementele tabloului sunt numere întregi cu maxim 4 cifre fiecare
- La fiecare ecuație de tipul I a, b, c vor fi precizate, chiar dacă acestea au valoarea 0 sau 1 (de exemplu $x + 2 = 3$ va apărea $1x + 2 = 3$)
- La fiecare ecuație de tipul II a, b, c, d vor fi precizate, chiar dacă acestea au valoarea 0 sau 1 (de exemplu $x^2 + 1 = 3$ va apărea $1x^2 + 0x + 1 = 3$)
- Pentru ecuațiile de tipul I a, b, c sunt numere naturale cu maxim 4 cifre
- Pentru ecuațiile de tipul II a, b, c, d sunt numere naturale cu maxim 4 cifre
- Se va acorda: 10% din punctaj pentru numărul de ecuații de tipul I, 30% din punctaj pentru câte dintre ele au exact o rădăcină în tablou, 20% din punctaj pentru numărul de ecuații de tipul II și 40% din punctaj pentru câte dintre ele au ambele rădăcini în tablou

Exemplu

`ec.in`	`ec.out`	Explicație

`2 5`
`1 2`
`2 -1`
`1x+0=0`
`20x2+40x+20=0`
`101x+200=402`
`2x2+1x+4=0`
`1x2+1x+3=5`
	`2 1`
	`3 1`
		Prima ecuație este de tipul I si are rădăcina 0, care nu se găsește în tablou.
		A doua ecuație este de tipul II și are două rădăcini egale cu -1, care se găsesc în tablou.
		A treia ecuație este de tipul I și are rădăcina 2, care se găsește în tablou.
		A patra ecuație este de tipul II și nu are rădăcinile în tablou.
		A cincea ecuație este de tipul II și are rădăcinile -2 și 1, dar nu sunt amândouă în tablou.

Timp maxim de execuție: 0.8 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (ONI 2011)

I 25 (**cifre**). Se consideră un număr natural n cu cel mult nouă cifre și cel puțin trei cifre.

Cerință

Să se scrie un program care citește numărul n și determină:

a) numărul de numere formate cu toate cifrele distincte din n;

b) cel mai mare număr obținut prin ștergerea a două cifre din n.

Date de intrare

În fișierul `cifre.in` pe prima linie se află n.

Date de ieșire

În fișierul `cifre.out` se vor afișa două numere, câte unul pe o linie: numărul de numere formate cu toate cifrele distincte din n, respectiv cel mai mare număr obținut prin ștergerea a două cifre din n.

Restricții și precizări

- $99 < n < 1000000000$
- Se acordă 50% din punctaj pentru rezolvarea corectă a subpunctului a)

Exemplu

`cifre.in`	`cifre.out`	Explicație
20206	4 226	a) Cu cifrele distincte 0, 2, 6 se pot forma 4 numere: 206, 260, 602, 620. b) Cel mai mare număr se obține ștergând cifrele zecilor și miilor.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

Clasele a XI-a și a XII-a

I 26 (**lant**). Se dă un graf neorientat prin numărul de noduri n, numărul de muchii m și prin perechile de noduri ce definesc muchiile ($1 < n < 200$).

Cerință

Determinați lungimea maximă a unui lanț elementar din graful dat.

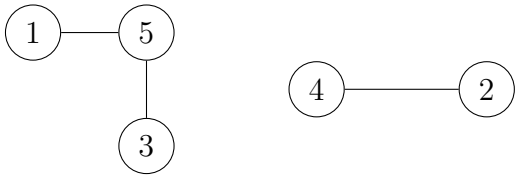
Date de intrare

Pe prima linie a fișierului `lant.in` se află n și m cu un spațiu între ele. Pe următoarele m linii se află perechi de noduri reprezentând muchii.

Date de ieșire

Pe prima linie a fișierului `lant.out` se va scrie numărul din cerință.

Exemplu

lant.in	lant.out	Explicație
5 3 4 2 1 5 5 3	2	 Lațul elementar $[1, 5, 3]$ are lungimea maximă, 2.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 27 (stalpi). Între doi stâlpi verticali aflați pe malurile unui râu (de o parte și de alta a râului) se află legate două cabluri bine întinse, paralele cu solul, având distanța dintre ele egală cu d centimetri. Cablurile sunt folosite pentru traversarea râului în caz de inundații. Stâlpii sunt notați cu A și B, iar cablurile cu 1 și 2 ca în figura de mai jos. Pe cabluri există desenate câte n puncte colorate cu diverse culori, culorile fiind codificate prin numerele $1, 2, 3, \ldots, k$. Poziția punctelor pe fiecare cablu este dată prin distanța față de stâlpul A, pentru fiecare punct. Punctele de pe fiecare cablu sunt numerotate cu $1, 2, 3, \ldots, n$. Pe fiecare cablu există cel puțin un punct colorat cu fiecare culoare. Pentru a ușura deplasarea pe cablu, primarul hotărăște să lege cu sârmă perechi de puncte de aceeași culoare, unul de pe primul cablu, iar celălalt de pe al doilea cablu, astfel încât:

1. pentru fiecare culoare să existe o singură pereche de puncte între care să fie legătură;
2. lungimea totală de sârmă folosită să fie minimă.

Cerință

Să se scrie un program care determină lungimea minimă a sârmei ce va fi folosită pentru rezolvarea problemei și o mulțime de perechi de puncte ce urmează a fi legate pentru a obține acest minim.

Date de intrare

Fișierul de intrare `stalpi.in` va conține:

1. pe prima linie numerele naturale nenule n, d separate printr-un spațiu;
2. pe a doua linie n perechi de numere, formate din distanța de la de stâlpul A la fiecare punct aflat pe cablul 1 și culoarea asociată punctului, separate prin câte un spațiu;
3. pe a treia linie n perechi de numere, formate din distanța de la stâlpul A la fiecare punct aflat pe cablul 2 și culoarea asociată punctului, separate prin câte un spațiu.

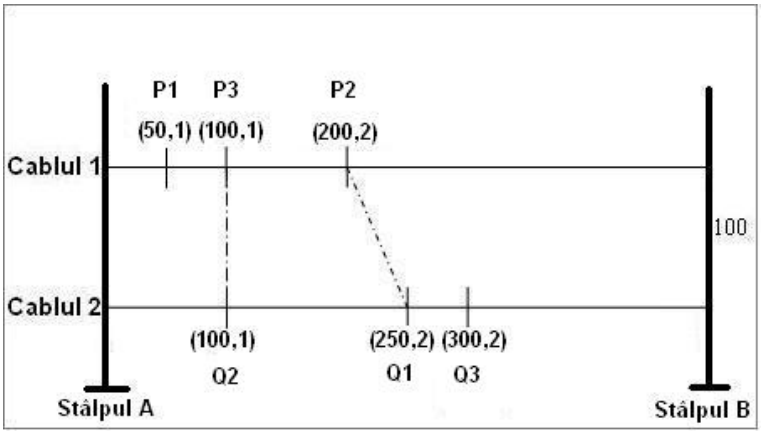
Date de ieșire

Fișierul de ieșire `stalpi.out` va conține pe prima linie valoarea minimă cerută, iar pe următoarele k linii numerele de ordine ale punctelor ce vor fi legate cu sârmă, separate printr-un spațiu, întâi cele de pe cablul 1, urmate de cele de pe cablul 2, în ordinea crescătoare a culorilor.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10000$
- $1 \leq k \leq 100$

- $1 \leq d \leq 1000$
- Distanța dintre cei doi stâlpi A și B este 30000
- Distanțele de la stâlpul A la puncte sunt numere naturale
- Distanța minimă va fi afișată trunchiată la primele 3 zecimale
- Toate punctele de pe un cablu sunt distincte
- Se acordă 40% din punctaj pentru determinarea corectă a minimului din cerință



Exemplu

stalpi.in	stalpi.out	Explicație
3 100 50 1 200 2 100 1 250 2 100 1 300 2	211.803 3 2 2 1	Sunt $n = 3$ perechi de puncte, $k = 2$ culori, codificate cu 1 și 2. Necesarul minim de sârmă este 211.803. Se leagă punctul P3 de punctul Q2 (ambele au culoarea 1). Se leagă punctul P2 de punctul Q1 (ambele au culoarea 2).

Timp maxim de execuție: 0.2 secunde/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești (ONI 2011)

I 28 (hoteluri). Într-o stațiune turistică există n hoteluri aparținând unui lanț hotelier. Pentru a micșora costurile legate de comunicarea între angajații hotelurilor, managerul lanțului hotelier se hotărăște să realizeze o rețea de comunicare telefonică prin conectarea hotelurilor prin cablu. Conexiunea trebuie făcută astfel încât orice două hoteluri să poată comunica direct sau prin intermediul altor hoteluri și în plus să existe două hoteluri între care să se realizeze legătura prin două modalități diferite.

Cerință

Să se scrie un program care pentru n dat să determine numărul de modalități de realizare a conexiunii între hoteluri, respectând cerințele din enunț.

Date de intrare

Fișierul de intrare `hoteluri.in` va conține numărul n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `hoteluri.out` va conține pe prima linie numărul din cerință.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$
- Două legături de comunicare între două hoteluri sunt diferite dacă au cel puțin un cablu de legătură diferit
- Două conexiuni ale lanțului hotelier sunt diferite dacă au cel puțin un cablu care apare într-o singură conexiune
- Comunicarea dintre două hoteluri printr-o legătură directă este în ambele sensuri

Exemplu

`hoteluri.in`	`hoteluri.out`	Explicație
`4`	`22`	Dacă se codifică hotelurile cu numerele 1, 2, 3, 4 trei dintre variantele de conexiune sunt următoarele: 1) [1,2];[2,3];[1,3];[3,4] 2) [1,2];[2,3];[1,3];[3,4];[1,4] 3) [1,2];[2,3];[1,3];[2,4];[1,4]

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 29 (**asezare**)**.** Un restaurant dispune de n mese și $4n$ scaune. Mesele sunt numerotate cu numerele $1, 2, \ldots, n$, iar scaunele cu numerele $1, 2, \ldots, 4n$. Se dorește să se așeze toate scaunele la mese, astfel încât la fiecare masă să fie câte exact 4 scaune, ordinea de așezare a scaunelor la masă nu are importanță.

Cerință

Să se scrie un program care pentru n dat determină toate modalitățile de așezare a scaunelor modulo 9973.

Date de intrare

Fișierul de intrare `asezare.in` va conține pe prima linie numărul n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `asezare.out` va conține numărul din cerință, modulo 9973.

Restricții și precizări

- $0 < n < 2001$
- Două modalități de așezare a scaunelor sunt diferite dacă există o masă cu cel puțin un scaun diferit
- n modulo k înseamnă restul împărțirii lui n la k

Exemplu

`asezare.in`	`asezare.out`	Explicație
`2`	`70`	Câteva așezări posibile: M1: 1, 2, 3, 4; M2: 5, 6, 7, 8 M1: 1, 2, 3, 5; M2: 4, 6, 7, 8 M1: 1, 2, 6, 4; M2: 5, 3, 7, 8

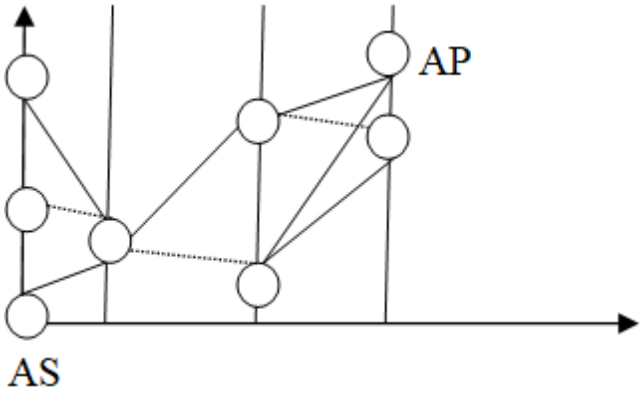
Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 4 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 30 (**campanie**). Un candidat la președinția unui mare stat al lumii a intrat în campania electorală. Pentru a obține cât mai multe voturi, staful de campanie dorește ca timpul fără activitate electorală să fie cât mai mic. Acest timp se măsoară prin distanța pe care o parcurge în interiorul orașelor pe drumuri fără alegători. Toate orașele alese pentru campanie au aceeași structură arhitecturală, adică fiecare conține câte două aeroporturi notate cu AS și AP, AS numai pentru sosiri, iar AP numai pentru plecări. Străzile fiecărui oraș sunt paralele, două străzi paralele consecutive sunt legate prin drumuri fără alegători, punctele unde se face legătura cu acestea sunt intersecții. Orice două intersecții de pe străzi paralele consecutive sunt legate printr-un drum, în linie dreaptă. Toate străzile au case și implicit și alegători. AS este pe prima stradă, în punctul cel mai din stânga-jos, iar AP pe ultima stradă, cea mai din dreapta a orașului.

Un exemplu de structură arhitecturală pentru un oraș este prezentat mai jos.



Staful de campanie are la dispoziție o hartă cu coordonatele aeroporturilor a N orașe și N hărți, câte una pentru fiecare oraș, cu coordonatele intersecțiilor de pe fiecare stradă.

Sistemul de coordonate pentru fiecare oraș are originea în aeroportul pentru sosiri AS, străzile fiind paralele cu axa ordonatelor, iar aeroportul pentru plecări AP se află pe ultima stradă (cea mai din dreapta). Axa ordonatelor este prima stradă (cea mai din stânga stradă).

Plecarea în campanie se face dintr-un aeroport de sosiri al unui oraș, iar sfârșitul pe un aeroport de plecare. Obligatoriu, candidatul trece prin toate aeroporturile.

Cerință

Determinați timpul minim fără activitate electorală în campania pentru președinție.

Date de intrare

Fișierul `campanie.in` are următoarea structură:

1. pe prima linie se află N, numărul de orașe;
2. pe următoarele linii se află datele pentru structura arhitecturală a fiecărui oraș: o linie cu coordonatele aeroporturilor xAS yAS xAP yAP, separate prin câte un spațiu, o linie cu numărul k de străzi urmat de $k-1$ numere cu distanțele dintre două străzi consecutive, separate prin câte un spațiu de la stânga la dreapta, apoi k linii cu pozițiile intersecțiilor de pe fiecare stradă în formatul: $h\ y_1\ y_2\ \ldots\ y_h$, unde $y_1, y_2, \ldots, y_h$ sunt ordonatele intersecțiilor. Ultima linie a datelor asociată unui oraș va conține ordonata aeroportului de plecări AP.

Date de ieșire

Fișierul `campanie.out` va conține un singur număr natural reprezentând timpul minim fără activitate electorală în campania pentru președinție, trunchiat la 4 zecimale.

Restricții și precizări

- N este număr natural cu proprietatea că $2 \leq N \leq 18$
- Distanța parcursă între două intersecții de coordonate (x_1, y_1) și (x_2, y_2) se definește ca fiind $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- Numărul de străzi dintr-un oraș ≤ 1000
- Numărul de intersecții de pe o stradă ≤ 1000
- Distanțele dintre două străzi consecutive ale aceluiași oraș ≤ 1000
- Toate ordonatele intersecțiilor dintr-un oraș și cea a aeroportului pentru plecări sunt ≤ 10000
- Coordonatele pe harta cu orașe sunt numere întregi din intervalul $[-10000, 10000]$

Exemplu

campanie.in	campanie.out	Explicații
3 0 0 30 30 3 10 20 2 0 20 2 10 20 3 0 10 30 0 0 100 10 2 100 1 0 2 0 10 200 0 300 0 2 100 1 0 1 0	230	În orașul 1 timpul fără activitate electorală va fi 30, în orașul 2 va fi 100, iar în orașul 3 va fi 100.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.

Memorie totală disponibilă 128 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești și *Gabriel Nicolae*, București

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII

Evariste Galois, un matematician genial

Stelian Corneliu Andronescu [1]

Anul 1829 este marcat de un eveniment important în viața lui Evariste Galois: al doilea eșec la Școala Politehnică. În istoria matematicii, această infamă examinare a devenit aproape echivalentă cu interogarea lui G. Galilei de către Inchiziție. În comparație cu E. Galois, cei doi examinatori C.L. Dinet și L. de Fouchy, nu erau, în cuvintele istoricului E.T. Bell, ,,nici măcar vrednici să-i ascută creioanele". Două decenii mai târziu, O. Terquem, editorul revistei ,,New Annals Mathematics", va spune: ,,un candidat cu inteligență superioară este pierdut dacă are un examinator cu inteligență inferioară".

Încurajat de A.L. Cauchy, Galois depune în februarie 1830 la Academia de Științe o nouă versiune a studiilor sale asupra ecuațiilor, în vederea concursului pentru marele premiu din matematică. Însă, la 28 iunie, Premiul Academiei este decernat matematicienilor N. Abel, cu titlul postum, și C.G.J. Jacobi. Galois avea o mare admirație pentru aceștia, dar s-a mirat că memoriul său nu a fost citat, aflând că J. Fourier, secretarul de atunci al Academiei, a decedat în luna mai, iar memoriul trimis la el s-a pierdut și nu a mai fost luat în considerare.

Fidel Bourbonilor, A.L. Cauchy îl însoțește pe Carol al X-lea în exil, raportor la Academie este acum S.D. Poisson, care îl invită pe E. Galois să înainteze din nou memoriul său asupra ecuațiilor acestui for. Astfel o nouă versiune a lucrării ,,Condiții pentru rezolvabilitatea ecuațiilor prin radicali" este prezentată pe 17 ianuarie 1831. Însărcinați cu recenzarea memoriului au fost S.D. Poisson și S. Lacroix. Răspunsul se lasă mult așteptat și îi cauzează lui Galois o nouă dezamăgire: memoriu este respins pe motivul că argumentele nu sunt suficient de clare și detaliate pentru a se putea face o idee asupra lui, sugerându-se o redactare mai completă. Chiar acceptând faptul că nu claritatea fusese vreodată punctul forte al lui Galois și că explicațiile date lăsau puțin de dorit, nu putem evita concluzia că una dintre cele mai imaginative realizări din istoria algebrei își avea încă de așteptat acceptarea. Referenții credeau că vor găsi în manuscris un criteriu simplu, bazat pe niște coeficienți, care să le spună imediat dacă orice ecuație particulară este rezolvabilă printr-o formulă sau nu. În loc de acesta, ei se treziseră în fața unui întreg concept, *teoria grupurilor*. Acest lucru era prea inovator pentru a fi acceptat în 1831.

În anul următor, la 31 mai, Galois este antrenat într-un duel cu pistoale și, în urma rănilor suferite, el moare. În ajunul duelului, Galois scrie trei scrisori. Cea adresată devotatului său

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

prieten A. Chevalier este considerată drept testamentul său de matematician: amintește aici de descoperirile sale, schițează apoi ceea ce astăzi numim *teoria lui Galois*, adăugând câteva teoreme noi la conținutul manuscrisului înaintat Academiei, cere prietenului său ,,să-i roage public pe C.G.J. Jacobi și pe C.F. Gauss să-și spună părerea nu asupra adevărului, ci asupra importanței teoremelor".

A. Galois, fratele mai mic al lui Galois, și A. Chevalier au copiat lucrările și le-au trimis lui Jacobi, Gauss și altora. În 1846, J. Liouville publică toate lucrările lui Galois în revista ,,Journal de Matematiques Pures et Aplique", după ce în 1843 el informase Academia de Științe despre rezultatele interesante conținute în acestea.

A fost momentul începând de la care, în secolele ce vor urma, lumea matematică își dă seama de originalitatea, profunzimea și măreția gândirii lui Galois, și-i va recunoaște locul cuvenit printre geniile ale căror operă a determinat schimbări semnificative în matematică.

Bibliografie

[1] M. Livio, *Ecuația ce n-a putut fi rezolvată*, Ed. Humanitas, București, 2007.

[2] ***, *Evariste Galois* (1811-1832), Recreații Matematice, nr. 1/2012.

Revistă sponsorizată de
ROWEB Development SRL
și
OSF Global Services SRL